

## Problema 673

Sea un triángulo ABC, y sea I su incentro. Prueba que entonces se verifica la siguiente relación:

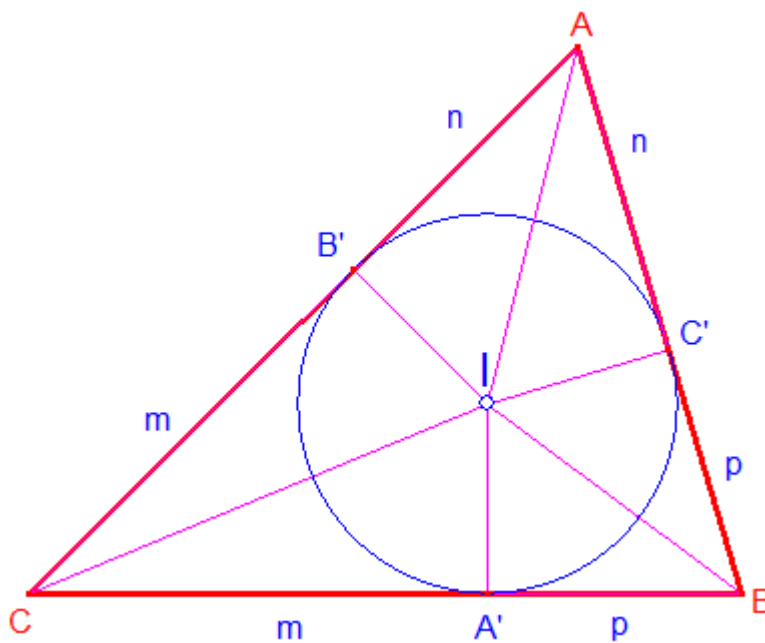
$$\frac{IA^2}{AB \cdot AC} + \frac{IB^2}{BC \cdot BA} + \frac{IC^2}{CA \cdot CB} = 1$$

Allaire, P.R., Zhou, J., Yao, H. (2012): Proving a nineteenth century ellipse identity. The mathematical Gazette. Vol. 96, Marzo (p. 161, 165)

**Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.**

Sea dado el triángulo ABC y su Incentro, I. Sean A', B' y C', los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con el triángulo inicial. Sea r, el radio de la circunferencia inscrita. Estos puntos interceptan sobre los respectivos lados, segmentos de longitudes m, n y p.

El área, S, del triángulo ABC viene dado por las siguientes expresiones:



$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C = a \cdot b \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = a \cdot b \cdot \frac{r}{IC} \cdot \frac{m}{IC}$$

$$S = (m + n + p) \cdot r$$

De donde, obtenemos:

$$a \cdot b \cdot \frac{1}{IC} \cdot \frac{m}{IC} = m + n + p$$

$$\frac{(m + p)(m + n)m}{IC^2} = m + n + p$$

$$\frac{IC^2}{(m + p)(m + n)} = \frac{m}{m + n + p}$$

De un modo similar, obtenemos:  $\frac{IB^2}{(m + p)(n + p)} = \frac{p}{m + n + p}$  y  $\frac{IA^2}{(m + n)(n + p)} = \frac{n}{m + n + p}$

En definitiva, tenemos:

$$\frac{IA^2}{(m + n)(n + p)} + \frac{IB^2}{(m + p)(n + p)} + \frac{IC^2}{(m + p)(m + n)} = \frac{n + p + m}{m + n + p} = 1$$

Por fin.  $\frac{IA^2}{b \cdot c} + \frac{IB^2}{a \cdot c} + \frac{IC^2}{a \cdot b} = 1$  c.q.d.