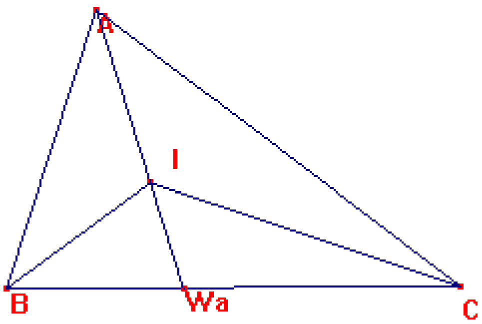
Problema 673

Sea un triángulo ABC, y sea I su incentro.

Se tiene: (IA IA)/(AB AC) + (IB IB)/(BA BC) + (IC IC)/ (CA CB)=1

Allaire, P.R., Zhou, J. , Yao, H. (2012) : Proving a nineteenth century ellipse identidy. The mathematical Gazette. Vol 96, Marzo (p. 161, 165)

Solución del director.



$$\mathrm{AWa} = \sqrt{bc(1 - (\frac{a^2}{(b+c)^2})}$$

AW_a/IW_a=h/r=(a+b+c)/a,

IA=AW_a-IW_a=AW_a – AWa ((a/(a+b+c))=

$$IA = AW_a - IW_a = AW_a - AW_a \left(\frac{a}{a+b+c}\right) = AW_a(\frac{b+c}{a+b+c})$$

Así es

$$\mathrm{IA} = \sqrt{bc(1 - (\frac{a^2}{(b+c)^2})} \left(\frac{b+c}{a+b+c}\right)$$

Así, es $IA\ IA = \frac{bc((b+c)^2-a^2)}{(a+b+c)^2}$

De manera análoga, es: $IB\ IB = \frac{ac((a+c)^2-ba^2)}{(a+b+c)^2}$

Y es: es $IC\ IC = \frac{ab((b+a)^2-c^2)}{(a+b+c)^2}$

Así tenemos :

es $\frac{IA\ IA}{AB\ AC}+\frac{IB\ IB}{BA\ BC}+\frac{IC\ IC}{CA\ CB}=\frac{bc((b+c)^2-a^2)}{bc\ (a+b+c)^2}+\frac{ac((a+c)^2-b^2)}{ac\ (a+b+c)^2}+\frac{ab((a+b)^2-c^2)}{ab\ (a+b+c)^2}$

Es decir, $\frac{IA\ IA}{AB\ AC}+\frac{IB\ IB}{BA\ BC}+\frac{IC\ IC}{CA\ CB}=\frac{(b+c)^2-a^2+(a+c)^2-b^2+\ (a+b)^2-c^2}{(a+b+c)^2}$

O sea, finalmente, $\frac{IA\ IA}{AB\ AC}+\frac{IB\ IB}{BA\ BC}+\frac{IC\ IC}{CA\ CB}=\frac{b^2+2bc+2ac+c^2+2ba+a^2}{(a+b+c)^2}=1$

Ricardo Barroso Campos

Profesor Jubilado

Universidad de Sevilla