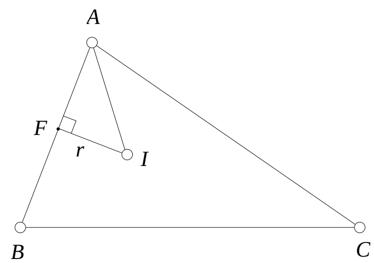
Problema 673. Sea un triángulo ABC, y sea I su incentro. Se tiene:

$$\frac{IA^2}{AB \cdot AC} + \frac{IB^2}{BA \cdot BC} + \frac{IC^2}{CA \cdot CB} = 1$$

Allaire, P.R., Zhou, J. , Yao, H., Proving a nineteenth century ellipse identidy. The mathematical Gazette. Vol 96, Marzo 2012 (161-165)

Soluzione di Ercole Suppa

Sia $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, siano rispttivamente p, r, S il semiperimetro, il raggio del cerchio inscritto, l'area di $\triangle ABC$ e sia F la proiezione di I su AB.



Dal triangolo rettangolo $\triangle AIF$ abbiamo $r = IA \cdot \sin \frac{A}{2}$. Usando le note formule

$$r = \frac{S}{p} \quad , \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad , \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

otteniamo

$$IA^2 = \frac{r^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{S^2}{p^2} \cdot \frac{bc}{(p-b)(p-c)} = \frac{bc(p-a)}{p} \tag{1}$$

Dalla (1) e dalle analoghe formule relative a IB^2, IC^2 segue che:

$$\frac{IA^2}{AB \cdot AC} + \frac{IB^2}{BA \cdot BC} + \frac{IC^2}{CA \cdot CB} = \frac{p-a}{p} + \frac{p-b}{p} + \frac{p-c}{p} = \frac{3p-2p}{p} = 1$$

$\square$