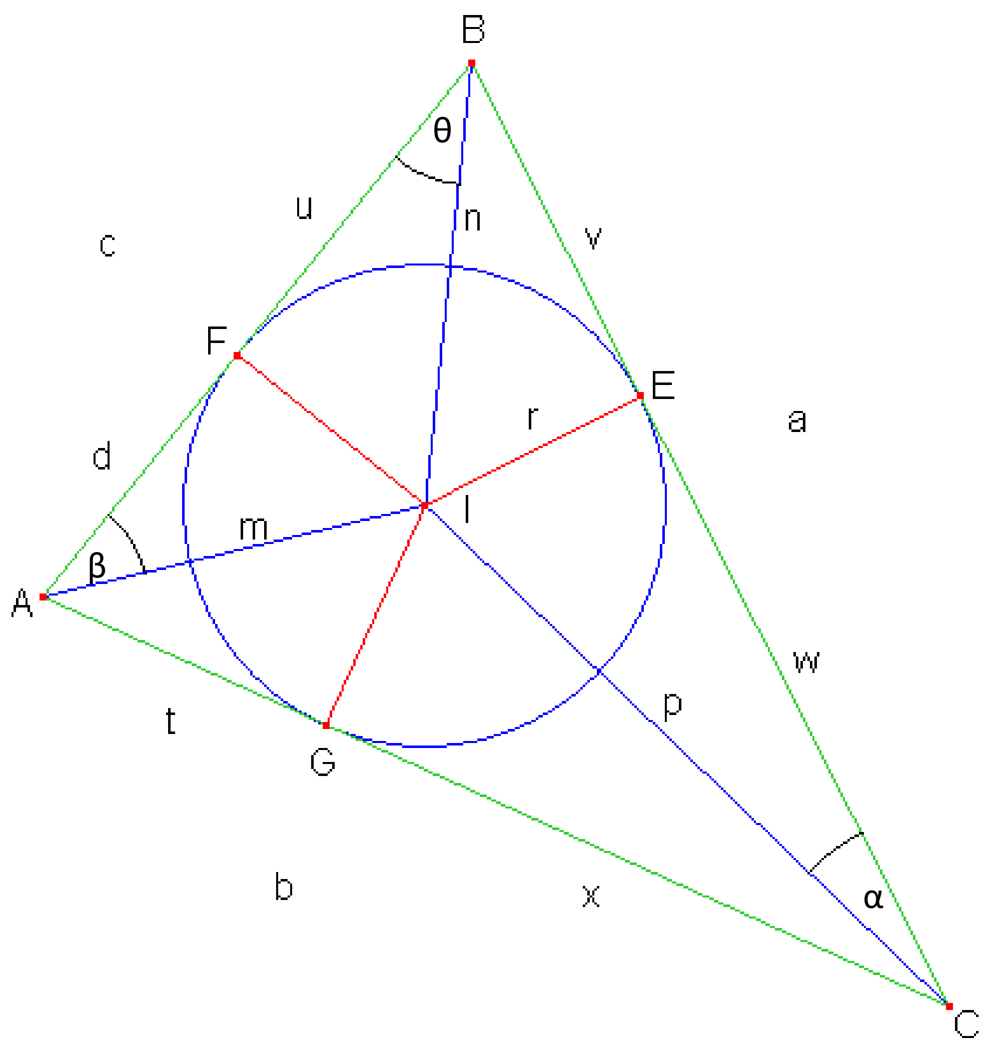
PROBLEMA 673

Solución de Inocencio Esquivel García.

Sea un triángulo ABC, y sea I su incentro.

Se tiene: (IA IA)/(AB AC) + (IB IB)/(BA BC) + (IC IC)/ (CA CB)=1

Allaire, P.R., Zhou, J. , Yao, H. (2012) : Proving a nineteenth century ellipse identidy. The mathematical Gazette. Vol 96, Marzo (p. 161, 165)



Tomemos los siguientes parámetros:

IA = m IB = n IC = p AB = c AC = b BD = a

Veamos a que corresponde

$$\frac{m^2}{bc} + \frac{n^2}{ac} + \frac{p^2}{ab}$$

r = m*senβ r = n*senθ r = p*senα

$$\frac{m^2}{bc} = \frac{r^2}{bc * sen^2\beta} \qquad \frac{n^2}{ac} = \frac{r^2}{ac * sen^2\theta} \qquad \frac{p^2}{ab} = \frac{r^2}{ab * sen^2\alpha}$$

Luego:

$$\frac{m^2}{bc} + \frac{n^2}{ac} + \frac{p^2}{ab} = r^2 \left(\frac{1}{bc * sen^2\beta} + \frac{1}{ac * sen^2\theta} + \frac{1}{ab * sen^2\alpha} \right)$$

Ahora:

$$bc * sen^2\beta = \frac{2bcsen\beta cos\beta sen\beta}{2cos\beta} = \frac{bcsen\ 2\beta}{2} \frac{sen\beta}{cos\beta} = S * tan\beta$$

Donde S es el área del triángulo ABC

De igual forma:

$$ac * sen^2\theta = S * tan\theta \qquad y \qquad ab * sen^2\alpha = S * tan\alpha$$

Tenemos entonces:

$$\frac{m^2}{bc} + \frac{n^2}{ac} + \frac{p^2}{ab} = r^2 \left(\frac{1}{S * tan\beta} + \frac{1}{S * tan\theta} + \frac{1}{S * tan\alpha} \right) =$$

$$= \frac{r^2}{S} \left(Cot\beta + Cot\theta + Cot\alpha \right)$$

$$Cot\beta = \frac{t}{r} \qquad Cot\theta = \frac{v}{r} \qquad Cot\alpha = \frac{x}{r}$$

Tenemos entonces que

$$\frac{m^2}{bc}+\frac{n^2}{ac}+\frac{p^2}{ab}=\frac{r^2}{S}\;\frac{t}{r}+\frac{v}{r}+\frac{x}{r}\;=\frac{r}{S}\;t+v+x \qquad (1)$$

Por otro lado se tiene que

Los triángulos BIE y BIF son congruentes

Como lo son AIF, AIG y CIE, CIG

El área total del triángulo ABC sería

$$S=\frac{2vr}{2}+\frac{2tr}{2}+\frac{2xr}{2}=\; vr+tr+xr=r(v+t+x)$$

Remplazando este valor en la ecuación (1) se tiene

$$\frac{m^2}{bc}+\frac{n^2}{ac}+\frac{p^2}{ab}=\frac{r}{S}\;t+v+x\;=\frac{r(t+v+x)}{r(v+t+x}=1$$