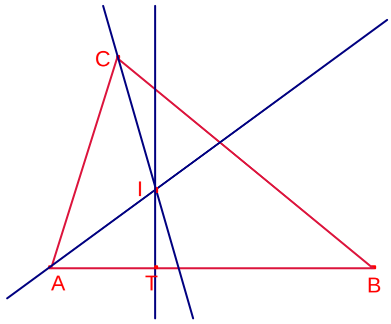
Problema 673

Siga un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i siga I el seu incentre.

Es té $\dfrac{\overline{AI}\cdot\overline{AI}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}+\dfrac{\overline{BI}\cdot\overline{BI}}{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}+\dfrac{\overline{CI}\cdot\overline{CI}}{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}=1.$

Allaire, P.R., Zhou, J. , Yao, H. (2012) : Proving a nineteenth century ellipse identidy. The mathematical Gazette. Vol 96, Marzo (p. 161, 165)



Solució Ricard Peiró i Estruch.

Siga r el radi de la circumferència inscrita, $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

Pel teorema del cosinus: $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

$$\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{1-\cos A}{2}=\frac{1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}=$$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}=\frac{(p-c)(p-b)}{bc}.$$

Anàlogament, $\sin^2\left(\dfrac{B}{2}\right)=\dfrac{(p-a)(p-c)}{ac}$ $\quad\sin^2\left(\dfrac{C}{2}\right)=\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $S_{ABC}=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

$\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{\overline{AI}}$, aleshores. $\overline{AI}=\dfrac{r}{\sin\dfrac{A}{2}}$. Anàlogament, $\overline{BI}=\dfrac{r}{\sin\dfrac{B}{2}}$. $\overline{CI}=\dfrac{r}{\sin\dfrac{C}{2}}$.

$$\frac{\overline{AI}\cdot\overline{AI}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}+\frac{\overline{BI}\cdot\overline{BI}}{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}+\frac{\overline{CI}\cdot\overline{CI}}{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}=\frac{\dfrac{r^2}{\sin^2\frac{A}{2}}}{bc}+\frac{\dfrac{r^2}{\sin^2\frac{B}{2}}}{ac}+\frac{\dfrac{r^2}{\sin^2\frac{C}{2}}}{ab}=.$$

$$=\frac{r^2}{(p-b)(p-c)}+\frac{r^2}{(p-a)(p-c)}+\frac{r^2}{(p-a)(p-b)}=$$

$$=\frac{r^2}{(p-a)(p-b)(p-c)}\big((p-a)+(p-b)+(p-c)\big)=$$

$$=\frac{r^2p}{(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=\frac{r^2p^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=\frac{{S_{ABC}}^2}{{S_{ABC}}^2}=1.$$