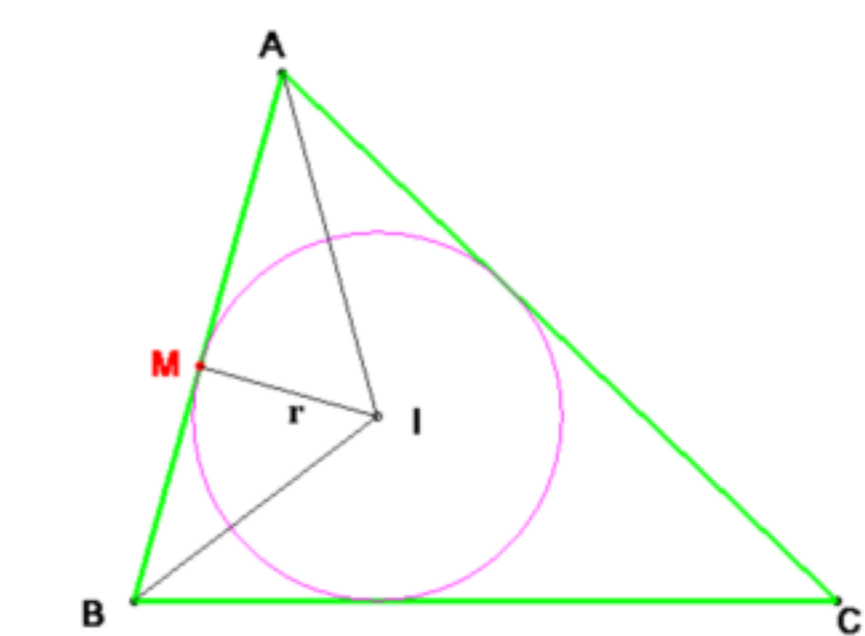


Problema 673.- Sea un triángulo ABC , y sea I su incentro. Se tiene:

$$\frac{IA \cdot IA}{AB \cdot AC} + \frac{IB \cdot IB}{BA \cdot BC} + \frac{IC \cdot IC}{CA \cdot CB} = 1.$$

Allaire, P.R., Zhou, J. , Yao, H. (2012) : Proving a nineteenth century ellipse identity. [The mathematical Gazette](#). Vol 96, Marzo (p. 161, 165).



Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

La solución pasa por encontrar una expresión adecuada, en función de los lados del triángulo ABC , para cada uno de los segmentos que unen el incentro con los vértices.

$$\text{De la figura se deduce } \operatorname{sen} \frac{A}{2} = \frac{r}{IA} \quad (1).$$

El seno puede expresarse mediante las fórmulas del ángulo mitad y después por el teorema del coseno en función de los lados del triángulo. En efecto: llamando s al semiperímetro del triángulo ABC resulta:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2} = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{4bc} = \frac{(s - b)(s - c)}{bc} \quad (2)$$

De la fórmula de Herón para el área del triángulo, (también igual al producto de su semiperímetro por el radio de la circunferencia inscrita), obtenemos

$$r^2 = \frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s} \quad (3)$$

Combinando las expresiones (1), (2) y (3) se obtiene

$$IA^2 = \frac{bc(s - a)}{s}. \text{ Análogamente } IB^2 = \frac{ca(s - b)}{s} \text{ e } IC^2 = \frac{ab(s - c)}{s}.$$

Con esto resulta

$$\frac{IA \cdot IA}{AB \cdot AC} + \frac{IB \cdot IB}{BA \cdot BC} + \frac{IC \cdot IC}{CA \cdot CB} = \frac{s - a}{s} + \frac{s - b}{s} + \frac{s - c}{s} = 1$$

■

En la figura, los triángulos BAM y NAC son semejantes, pues tienen igual el ángulo en A y el ángulo en M de uno es el ángulo en C del otro por ser inscritos que abarcan el mismo arco. De ahí se sigue la relación $\frac{AB}{AN} = \frac{AM}{AC}$ o bien $cb = AN \cdot AM = v_a \cdot (v_a + NM) = v_a^2 + v_a \cdot NM$, donde $AN = v_a$, la bisectriz de A .

El segundo sumando es la potencia (en valor absoluto) del punto N respecto de la circunferencia ABC , y por ello, también puede ponerse como $BN \cdot NC$, segmentos cuya longitud sabemos calcular, gracias al teorema de la bisectriz:

$$BN = \frac{ac}{b + c}, \quad NC = \frac{ab}{b + c} \text{ y } BN \cdot NC = \frac{a^2bc}{(b + c)^2}.$$

De todo esto

$$cb = v_a^2 + \frac{a^2bc}{(b + c)^2},$$

que permite expresar la longitud de la bisectriz de A en función de los lados del triángulos.

Llamando s al semiperímetro del triángulo ABC resulta:

$$v_a = \frac{2}{b + c} \sqrt{bcs(s - a)} \quad (1)$$

De $BN = \frac{ac}{b + c}$ obtenemos $\frac{BA}{BN} = \frac{b + c}{a}$ (*) y del teorema de la bisectriz aplicado ahora al triángulo ABN : $\frac{IA}{IN} = \frac{BA}{BN}$ (**), esto es, $\frac{IA}{IN} = \frac{BA}{BN} = \frac{b + c}{a}$ o bien

$$\frac{a}{IN} = \frac{b + c}{IA} = \frac{a + b + c}{v_a} \quad (2)$$

Las expresiones (1) y (2), son las que dan la solución del problema, al permitir el cálculo del segmento IA en función de los lados del triángulo:

$$(b + c)v_a = 2\sqrt{bcs(s - a)} = (a + b + c) \cdot IA = 2s \cdot IA$$