

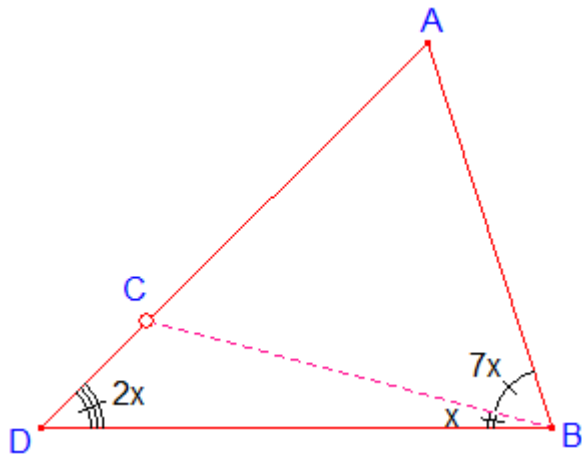
Problema 674

Tenemos un triángulo ABD tal que hay un punto C interior al lado AD, con $\angle CBA=7x$, $\angle CBD=x$; $\angle ADB=2x$. Hallar x . (Anónimo.)

Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, profesor de la Academia San Isidro (Huaral), de Perú

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Sea dado el triángulo ABC y sean marcados los ángulos $\angle CBA=7x$, $\angle CBD=x$; $\angle ADB=2x$.



A continuación haremos uso repetido del Teorema de los Senos:

* En el triángulo BCA $\rightarrow$

$$\frac{AC}{\sin 7x} = \frac{BC}{\sin 10x}$$

* En el triángulo BCD $\rightarrow$

$$\frac{CD}{\sin x} = \frac{BC}{\sin 2x}$$

* En el triángulo ABD $\rightarrow$

$$\frac{AD}{\sin 8x} = \frac{BD}{\sin 10x}$$

Relacionamos la última relación con la igualdad: $AD = AC + CD$

$$\frac{AD}{\sin 8x} = \frac{BD}{\sin 10x}; \quad AD = AC + CD = \frac{BC \cdot \sin 7x}{\sin 10x} + \frac{BC \cdot \sin x}{\sin 2x}$$

$$\frac{BC \cdot \sin 7x}{\sin 10x} + \frac{BC \cdot \sin x}{\sin 2x} = \frac{BD}{\sin 10x}$$

$$\frac{BC}{BD} \cdot \left(\frac{\sin 7x}{\sin 10x} + \frac{\sin x}{\sin 2x} \right) = \frac{1}{\sin 10x} \quad (I)$$

Por otro lado, en el triángulo BCD $\rightarrow$

$$\frac{BC}{BD} = \frac{\sin 2x}{\sin 3x} \quad (II)$$

De las relaciones (I) y (II), obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{\sin 2x}{\sin 3x} \left(\frac{\sin 7x}{\sin 10x} + \frac{\sin x}{\sin 2x} \right) = \frac{1}{\sin 10x}; \quad \frac{\sin 7x \cdot \sin 2x}{\sin 10x \cdot \sin 3x} + \frac{\sin x}{\sin 3x} = \frac{1}{\sin 10x}$$

$$\frac{\sin 7x \cdot \sin 2x}{\sin 3x} + \frac{\sin 10x \cdot \sin x}{\sin 3x} = 1; \quad \sin 7x \cdot \sin 2x + \sin 10x \cdot \sin x = \sin 3x$$

$$-\frac{1}{2}(\cos 9x - \cos 5x) - \frac{1}{2}(\cos 11x - \cos 9x) = \sin 3x; \quad \underbrace{-\frac{1}{2}(\cos 11x - \cos 5x)}_{\sin 8x \cdot \sin 3x} = \sin 3x$$

$$\sin 8x \cdot \sin 3x = \sin 3x \quad (\sin 3x \neq 0); \quad \sin 8x = 1 \Rightarrow 8x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{16}$$

