Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat, de Perú

Problema 675.
Dado un triángulo ABC, tenemos: Un punto D en el interior del lado BC; un punto E en el interior del lado AC; AE=AB; <DAB=36º, <DAE=12º, <BCA=36º. Calcular <ADE.
En la siguiente figura, calcular el valor de "x".
Propuesto en la academia INGENIEROS-UNI de Huaral el día Jueves 17 de Enero de 2013

Solución de Fabiola Czwienczek, profesora de Matemática (jubilada). Turmero, Venezuela.

En la figura 1, se muestra un triángulo ABC en el cual se representan los datos dados. Debemos determinar la medida de <ADE.

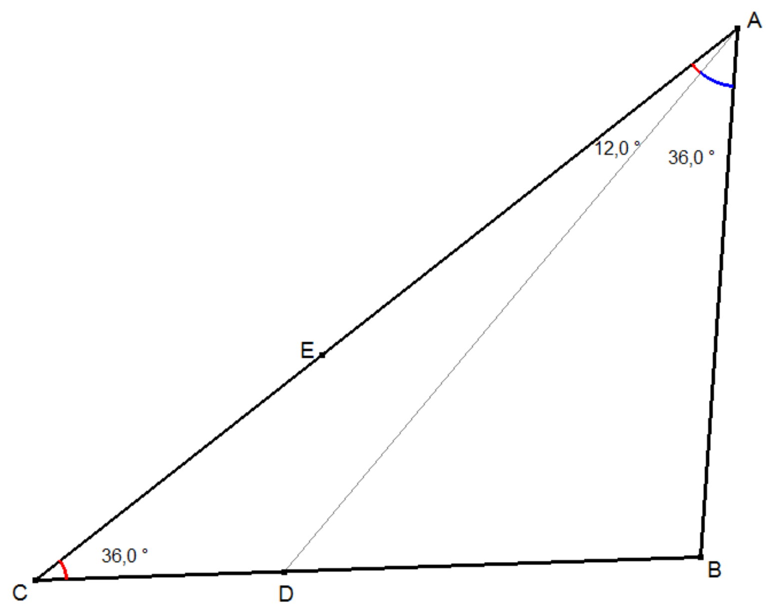

Figura 1

Como el punto D está en el interior del lado BC, se puede afirmar que la medida del ángulo <BAC es 48°. En consecuencia, la medida del ángulo <CBA es 96°. Tracemos el segmento $\overline{BE}$ y sea F el punto de intersección de $\overline{BE}$ y $\overline{AD}$ (ver figura 2). Como AE = AB, los ángulos <AEB y <ABE son congruentes y dado que el <BAC mide 48°, se tiene que la medida de los ángulos <AEB y <ABE es 66°. Luego, la medida del ángulo <AFE es 102°.

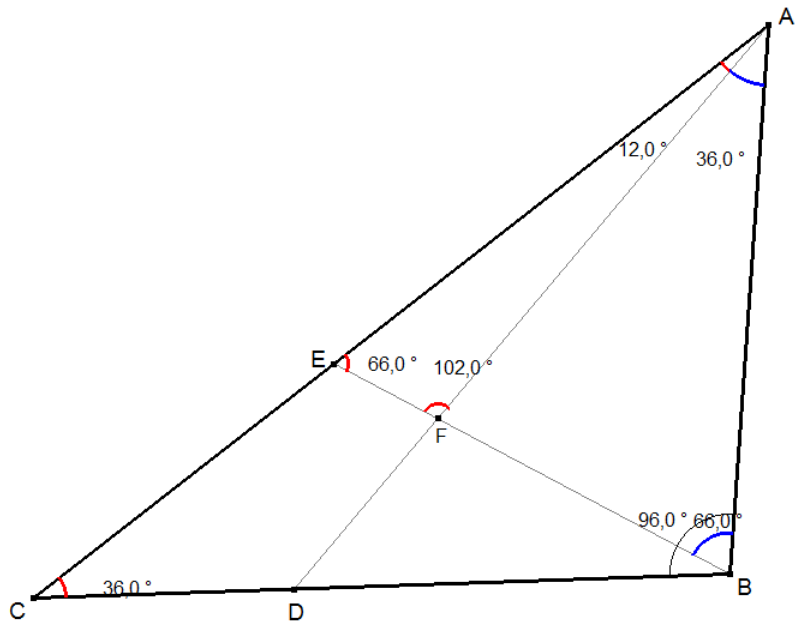

Figura 2

Recordemos que debemos determinar la medida del <ADE. Tracemos el segmento $\overline{\mathrm{DE}}$. Si denotamos la medida del <ADE por x, entonces la medida del <DEF es 102° – x. En consecuencia, el <DEA mide 168° – x. Consideremos los triángulos ADE y ADB, los cuales hemos sombreado en la figura 3

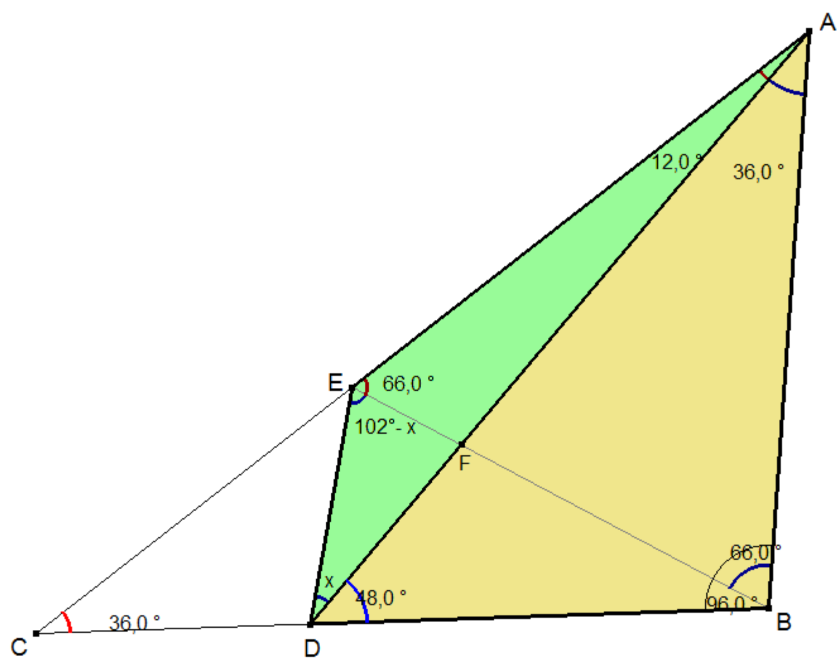

Figura 3

Aplicando ley de los senos en estos triángulos, tenemos que:

$$\frac{AE}{sen\ x} = \frac{AD}{sen\ (168°-x)} = \frac{ED}{sen\ 12°} \quad \textbf{(1)}$$

$$\frac{AD}{sen\ 96°} = \frac{AB}{sen\ 48°} = \frac{BD}{sen\ 36°} \quad \textbf{(2)}$$

| De (1), tenemos que:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{sen\ x}{sen\ (168°-x)} \quad \textbf{(3)}$$

De (2), tenemos que:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{sen\ 48°}{sen\ 96°} \quad \textbf{(4)}$$

Simplificando el miembro derecho de (4) y sustituyendo AB = AE, obtenemos

$$\frac{AE}{AD} = \frac{1}{2\cos 48°} \quad \textbf{(5)}$$

De (3) y (5) :

$$\frac{sen\ x}{sen\ (168°-x)} = \frac{1}{2\cos 48°}$$

De donde:

2 cos 48° sen x = sen (168° – x) = sen 168° cos x – sen x cos 168°

⇒ 2 cos 48° sen x + sen x cos 168° = sen 168° cos x

⇒ sen x (2 cos 48° + cos 168°) = sen 168° cos x

⇒ $\frac{sen\ x}{\cos x} = \frac{sen\ 168°}{2\cos 48° + \cos 168°}$

⇒ tan x $= \frac{sen\ 168°}{2\cos 48° + \cos 168°}$ **(6)**

Nótese que:

sen 168° = sen 12°

cos 168° = – cos 12°

cos 48° = cos (60°– 12°) = cos 60° cos 12° + sen 60° sen 12° = $\frac{\cos\ 12°+\sqrt{3}\,sen\ 12°}{2}$

Sustituyendo estos valores en (6) obtenemos:

$$\tan x = \frac{sen\ 12°}{2.\frac{\cos\ 12°+\sqrt{3}\,sen\ 12°}{2}-\cos 12°} = \frac{sen\ 12°}{\sqrt{3}\ sen\ 12°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como tan x = $\frac{\sqrt{3}}{3}$, se deduce que x = 30°.

Por tanto, la medida del <ADE es 30°.