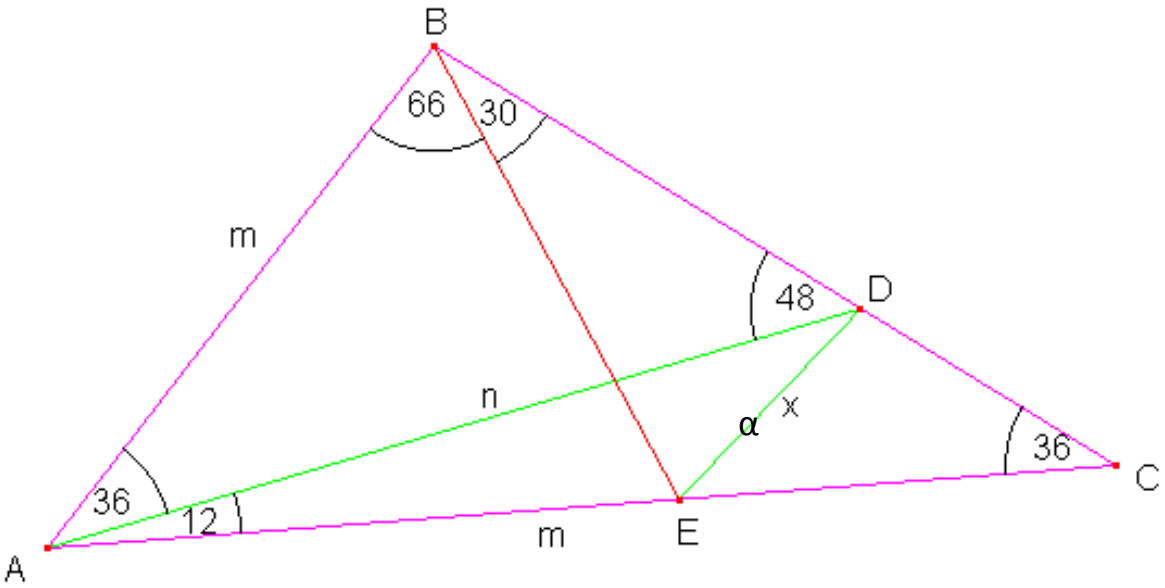
PROBLEMA 675

Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat, de Perú

Dado un triángulo ABC, tenemos: Un punto D en el interior del lado BC; un punto E en el interior del lado AC; AE=AB; <DAB=36º, <DAE=12º, <BCA=36º. Calcular <ADE.

Solución de Inocencio Esquivel García.



Por las medidas que se tienen, el ángulo ABC mide 96º.

Como el triángulo ABE es Isósceles los ángulos ABE y AEB miden 66º

Por teorema del seno se tiene:

$$\frac{x}{sen12}=\frac{m}{sen\alpha} \quad ; \quad \frac{m}{sen48}=\frac{n}{sen96} \quad ; \quad \frac{BE}{sen48}=\frac{m}{sen66}$$

$$\frac{x}{sen30}=\frac{BE}{sen(48+\alpha)} \quad que\ es \quad 2x=\frac{BE}{sen(48+\alpha)}$$

De aquí se tiene

$$m=\frac{nsen48}{sen96}=\frac{n}{2cos48} \qquad x=\frac{msen12}{sen\alpha}=\frac{nsen12}{2cos48sen\alpha}$$

$$BE = \frac{msen48}{sen66}$$

$$2x = \frac{BE}{sen(48+\alpha)} = \frac{msen48}{sen66.sen(48+\alpha)}$$

Se tiene entonces:

$$x = \frac{msen48}{2.sen66.sen(48+\alpha)} = \frac{nsen12}{2cos48sen\alpha} \quad remplazando\ m$$

$$x = \frac{nsen48}{2.2.cos48.sen66.sen(48+\alpha)} = \frac{nsen12}{2cos48sen\alpha}\ simplificando$$

$$\frac{sen48}{2sen66sen(48+\alpha)} = \frac{sen12}{sen\alpha}\ de\ aqui\ tenemos$$

$$\frac{sen(48+\alpha)}{sen\alpha} = \frac{sen48}{2sen66.sen12}$$

$$\frac{sen48cos\alpha + sen\alpha cos48}{sen\alpha} = \frac{sen48}{2sen66.sen12}$$

$$\frac{sen48cos\alpha}{sen\alpha} + cos48 = \frac{sen48}{2sen66.sen12}$$

$$\frac{sen48cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{sen48}{2sen66.sen12} - cos48\ \ y\ de\ aqui$$

$$cot\alpha = \frac{1}{2sen66.sen12} - cot48 = \quad \overline{3}$$

Por tanto α = 30º