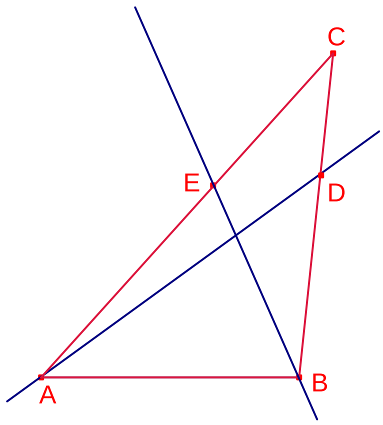
Problema 675.

Donat un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que D és un punt interior al costat $\overline{BC}$, E un punt interior al costat $\overline{AC}$; $\overline{AE}=\overline{AB}$, $\angle DAB=36^o$, $\angle DAE=12^o$, $\angle BCA=36^o$.
Calculeu $\angle ADE$.




Solució de Ricard Peiró:
Siga $\angle ADE=\alpha$.

$A=\angle DAB+\angle DAE=36^o+12^o=48^o$.

$B=180^o-(A+C)=180^o-(48^o+36^o)=96^o$.

$\angle ADB=180^o-(\angle DAB+B)=48^o$

$\overline{AE}=\overline{AB}=c$.

Aplicant el teorema dels sinus Al triangle $\overset{\Delta}{ADE}$:

$$\frac{c}{\sin\alpha}=\frac{\overline{AD}}{\sin(12^o+\alpha)} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema dels sinus Al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\frac{c}{\sin 48^o}=\frac{\overline{AD}}{\sin 96^o} \qquad (2)$$

Dividint les expressions (1) (2):

$$\frac{\sin 48^o}{\sin\alpha}=\frac{\sin 96^o}{\sin(12^o+\alpha)} \qquad (3)$$

Aplicant relacions angle doble:

$$\frac{\sin 48^o}{\sin\alpha}=\frac{2\sin 48^o\cdot\cos 48^o}{\sin(12^o+\alpha)} \qquad (4)$$

$$\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{2\cos 48^o}{\sin(12^o+\alpha)} \qquad (5)$$

$$\sin(12^o+\alpha)=2\sin\alpha\cdot\cos 48^o \qquad (6)$$

transformant productes en sumes:

$$\sin(12^o+\alpha)=\sin(\alpha-48^o)+\sin(\alpha+48^o) \qquad (7)$$

$$\sin(12^o+\alpha)-\sin(\alpha-48^o)=\sin(\alpha+48^o) \qquad (8)$$

transformant sumes amb productes:

$$2\cos(\alpha-18^o)\cdot\sin 30^o=\sin(\alpha+48^o) \qquad (9)$$

$$\cos(\alpha-18^o)=\sin(\alpha+48^o) \qquad (10)$$

Relacions angles complementaris:

$$\alpha-18^o=90^o-(\alpha+48^o) \qquad (11)$$

Resolent l'equació:

$\alpha=30^o$.