

Problema 675.

Dado un triángulo $\triangle ABC$, tenemos: Un punto D en el interior del lado $\overline{BC}$; un punto E en el interior del lado $\overline{AC}$; $\overline{AE} = \overline{AB}$, $\angle DAB = 36^\circ$, $\angle DAE = 12^\circ$, $\angle BCA = 36^\circ$. Calcular $\angle ADE$.

Propuesto en la academia INGENIEROS-UNI de Huaral el día Jueves 17 de Enero de 2013

Solución de Ricard Peiró:

Sea $\angle ADE = \alpha$.

$$A = \angle DAB + \angle DAE = 36^\circ + 12^\circ = 48^\circ.$$

$$B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (48^\circ + 36^\circ) = 96^\circ.$$

$$\angle ADB = 180^\circ - (\angle DAB + B) = 48^\circ$$

$$\overline{AE} = \overline{AB} = c.$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\triangle ADE$:

$$\frac{c}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AD}}{\sin(12^\circ + \alpha)} \quad (1)$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\triangle ABD$:

$$\frac{c}{\sin 48^\circ} = \frac{\overline{AD}}{\sin 96^\circ} \quad (2)$$

Dividiendo las expresiones (1) (2):

$$\frac{\sin 48^\circ}{\sin \alpha} = \frac{\sin 96^\circ}{\sin(12^\circ + \alpha)} \quad (3)$$

Aplicando relaciones ángulo doble:

$$\frac{\sin 48^\circ}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin 48^\circ \cdot \cos 48^\circ}{\sin(12^\circ + \alpha)} \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos 48^\circ}{\sin(12^\circ + \alpha)} \quad (5)$$

$$\sin(12^\circ + \alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \cos 48^\circ \quad (6)$$

Transformando productos en sumas:

$$\sin(12^\circ + \alpha) = \sin(\alpha - 48^\circ) + \sin(\alpha + 48^\circ) \quad (7)$$

$$\sin(12^\circ + \alpha) - \sin(\alpha - 48^\circ) = \sin(\alpha + 48^\circ) \quad (8)$$

Transformando sumas en productos:

$$2 \cos(\alpha - 18^\circ) \cdot \sin 30^\circ = \sin(\alpha + 48^\circ) \quad (9)$$

$$\cos(\alpha - 18^\circ) = \sin(\alpha + 48^\circ) \quad (10)$$

Relaciones ángulos complementarios:

$$\alpha - 18^\circ = 90^\circ - (\alpha + 48^\circ) \quad (11)$$

Resolviendo la ecuación:

$$\alpha = 30^\circ.$$

