Problema 676.

728.-Problema 8º.- Dividir un triángulo en tres porciones equivalentes, por líneas que partan de un punto interior dado. (pag 243)

Fernández Deus, Emilio (1872): Geometría (p. 243). Coruña. Tipografía Casa de Misericordia.

Solución de Fabiola Czwienczek, profesora de Matemática (jubilada). Turmero, Venezuela

Supongamos que el triángulo dado es el triángulo ABC y que el punto interior dado es el punto D, como se muestra en la figura 1. Antes de exponer la solución, haremos la siguiente observación. Si trazamos los segmentos $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ y $\overline{DC}$, tendremos tres triángulos, a saber: ADB, BDC y CDA, cuyas áreas denotaremos por (ADB), (BDC) y (CDA), respectivamente. Tenemos que (ADB) + (BDC) + (CDA) = (ABC).

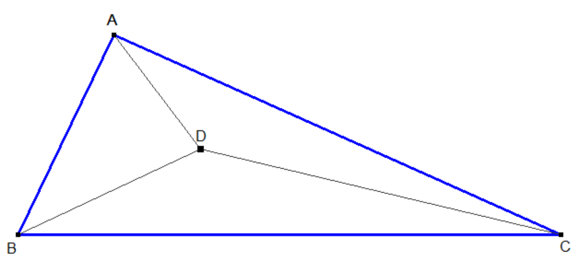

Figura 1

Nótese que se presentan los siguientes casos:

Caso 1: (ADB) = (BDC) = (CDA) = (ABC)/3

Caso 2: sólo uno de los tres triángulos tiene área igual a (ABC)/3. Si este es el caso, necesariamente, uno de los otros dos triángulos deberá tener un área mayor a (ABC)/3.

Caso 3: (ADC) ≠ (ABC)/3 y (BDC) ≠ (ABC)/3 y (CDA) ≠ (ABC)/3

Si este es el caso, se afirma que por lo menos uno de estos triángulos ha de tener un área mayor a (ABC)/3. En efecto, si no fuese así, entonces

(ADB) < (ABC)/3 y (BDC) < (ABC)/3 y (CDA) < (ABC)/3

Sumando miembro a miembro estas desigualdades, obtenemos que

(ADB) + (BDC) + (CDA) < (ABC), lo cual es una contradicción.

Habiendo hecho estas observaciones, volvamos al problema de dividir el triángulo ABC en tres porciones equivalentes mediante líneas que partan de un punto interior D dado.

En primer lugar, calculemos el área (ABC) del triángulo dado y determinemos su tercera parte. En este paso, Cabri II es una herramienta útil, porque efectúa estas operaciones. Una vez hallado (ABC)/3, procedemos a calcular las áreas de los triángulos ADB, BDC y CDA.

Si (ADB) = (BDC) = (CDA) = (ABC)/3, ya hemos hallado la solución. Las líneas son los segmentos $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ y $\overline{DC}$, y las porciones son los tres triángulos ADB, BDC y CDA.

Si sólo un triángulo tiene área igual a (ABC)/3 (caso 2) o ningún triángulo tiene área (ABC)/3 (caso 3), tenemos la garantía de que uno de los tres triángulos tiene área mayor que (ABC)/3.

Supongamos que ése sea el triángulo BDC. Determinemos el punto E en el interior del lado BC, de manera que el área del triángulo BDE sea (ABC)/3. ¿Cómo lo hacemos?. Tracemos el segmento $\overline{DH}$, perpendicular a $\overline{BC}$. Determinemos su medida h (ver figura 2).

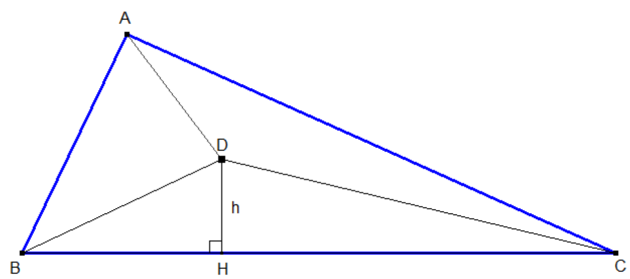

Figura 2

¿Qué medida debe tener el segmento $\overline{BE}$ para que el área del triángulo BDE sea igual a (ABC)/3?. Debe ser BE = $\frac{2\,(ABC)}{3h}$. La calculadora de Cabri II nos proporciona esta medida. Ahora, con la herramienta compás, hacemos centro en B y con radio BE, trazamos la circunferencia y hallamos el punto de corte con $\overline{BC}$. En la figura 3 se muestra el triangulo BDE, cuya área es (ABC)/3.

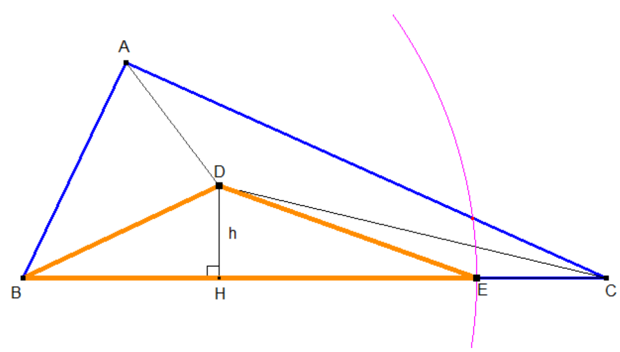

Figura 3

Si el área del triángulo ADB es igual a (ABC)/3, el problema ya estaría resuelto. Las líneas pedidas serían los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{DB}$ y $\overline{DE}$ y las porciones serían los triángulos ADB y BDE y el cuadrilátero ADEC.

Ahora bien,

- si el área del triángulo ADB es mayor que (ABC)/3, con un procedimiento análogo al descrito antes, se determina el punto F en $\overline{AB}$, tal que el área del triángulo BDF sea (ABC)/3. En consecuencia, el polígono DFACE tendrá como área (ABC)/3. El problema queda así resuelto.

- si el área del triángulo ADB es menor que (ABC)/3, se calcula la diferencia d entre estas áreas. Luego, se determina el punto F en el segmento $\overline{AC}$ de manera que el área del triángulo ADF sea igual a d. Así, el cuadrilátero DBAF tendrá área igual a (ABC)/3, al igual que el cuadrilátero FDEC. Resuelto el problema. En la figura 4 se muestra este caso.

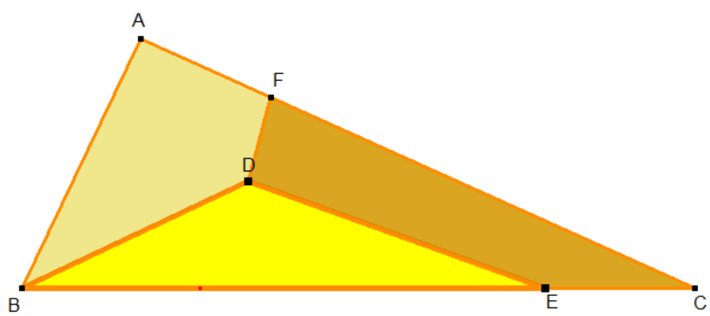

Figura 4