

Problema 677, propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, Perú:

En el triángulo ABC , tenemos D sobre el interior del lado AC con $DC = AB$. Es también $\angle ABD = \angle BCA = 30^\circ$. Hallar $\angle BAC$.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo:

Los triángulos ABC y ADB tienen dos ángulos respectivamente iguales (el ángulo en el vértice A y el ángulo de 30°), luego son semejantes y, por tanto, sus lados tienen longitudes directamente proporcionales; en particular, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$, es decir, $AB^2 = (AC - DC)AC$, luego, al ser $DC = AB$, resulta que

$$AB^2 + AC \cdot AB - AC^2 = 0 \text{ y, por tanto, } AB = \frac{1}{2} \left(-AC \pm \sqrt{AC^2 + 4AC^2} \right), \text{ con lo cual } 2AB = (\sqrt{5} - 1)AC.$$

Del teorema de los senos en el triángulo ABC , se deduce que $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AB}{\sin 30^\circ}$ y que

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sin \angle BAC}{\sin \angle CBA}; \text{ así, } \sin \angle BAC = \frac{BC}{2AB} = \frac{BC}{(\sqrt{5} - 1)AC} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \frac{\sin \angle BAC}{\sin \angle CBA}, \text{ luego } \sin \angle CBA = \frac{\sqrt{5} + 1}{4},$$

siendo entonces $\angle CBA \in \{54^\circ, 126^\circ\}$ ó y, por ello, $\angle BAC = 180^\circ - 30^\circ - \angle CBA \in \{96^\circ, 24^\circ\}$.