Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat, de Perú.

Problema 677
En el triángulo ABC, tenemos D sobre el interior del lado AC con DC=AB. Es también <ABD=<BCA=30º. Hallar <BAC.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Sea dado el triángulo ABC y sea señalado el punto D, en el interior del segmento AC, de modo que se verifique lo indicado en el enunciado. Sean pues, los ángulos <ABD = < BCA=30º.

Para aligerar la notación, llamaremos m = AD y n =AB = DC.

Podemos deducir de la semejanza entre los triángulos CAB y BAD, las siguientes relaciones:

$$\frac{n}{m+n}=\frac{m}{n}\Rightarrow n^2-m.n-m^2=0\Rightarrow\left(\frac{n}{m}\right)^2-\frac{n}{m}-1=0$$

$$\frac{n}{m}=\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Por otro lado,

$$\frac{sen30^o}{m}=\frac{sen(150^o-x)}{n}\Rightarrow\frac{n}{m}=\frac{sen(150^o-x)}{sen30^o}$$

Igualando ambas expresiones, tenemos que:

$$sen(150^o-x)=\frac{\phi}{2}\Rightarrow\begin{cases}150^o-x=54^o\\150^o-x=126^o\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=96^o\\x=24^o\end{cases}$$

Su construcción.- Dado el segmento n =AB, y el arco-capaz de dicho segmento con ángulo 30º, construimos el segmento m, de modo que $\frac{n}{m}=\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow \; m=\frac{n}{\phi}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.n$ Así, una vez ya construidos los segmentos m y n, trazamos desde el vértice B una semirrecta BD que interceptará en dos puntos D_1 y D_2, ambas soluciones del problema.