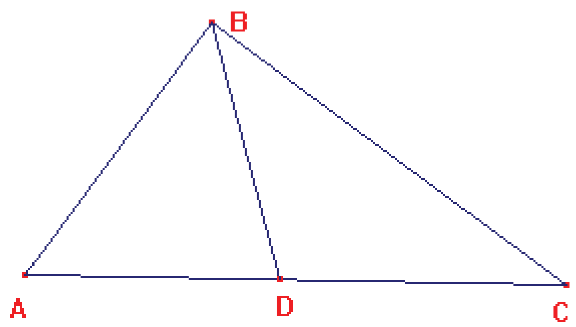
Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat, de Perú

Problema 677

En el triángulo ABC, tenemos D sobre el interior del lado AC con DC=AB. Es también <ABD=<BCA=30º. Hallar <BAC.

Anónimo

Solución del director:



“Supongamos” resuelto el problema, y sin pérdida de generalidad, que BC=1.

Sea BD=u, DC=BA=m. Sea AD=v.

Por el teorema del coseno, tenemos:

$$u^2 = 1^2 + m^2 - 2\,1\,m\cos 30º = 1 + m^2 - \sqrt{3}m$$

Por ello, $u = \sqrt{1 + m^2 - \sqrt{3}m}$

Tenemos lo siguiente, por la semejanza de los triángulos ABD y ACB:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{BD}{CB} \rightarrow \frac{m}{v+m} = \frac{v}{m} = \frac{\sqrt{1 + m^2 - \sqrt{3}m}}{1}$$

De donde $v = m\sqrt{1 + m^2 - \sqrt{3}m}$

Y así, $\frac{m}{m\sqrt{1+m^2-\sqrt{3}m}+m} = \frac{m\sqrt{1+m^2-\sqrt{3}m}}{m} = \frac{\sqrt{1+m^2-\sqrt{3}m}}{1}$

Es decir:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + m^2 - \sqrt{3}m} + 1} = \sqrt{1 + m^2 - \sqrt{3}m}$$

De donde operando y simplificando se tiene:

$$m^4 - 2\sqrt{3}m^3 + 2m^2 + \sqrt{3}m - 1 = 0$$

Ecuación que llevada a la web

http://www.wolframalpha.com

Da cuatro soluciones:

$$m_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}) \approx 1.2293$$

$$m_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}) \approx 0.50275$$

$$m_3 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\right) \approx -0.67282$$

Y por último,

$$m_4 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}) \approx 2.4049$$

Por otra parte, por el teorema de los senos, tenemos:

$$\frac{sen\ ACB}{m} = \frac{sen\ BAC}{1}$$

Así es $< BAC = arc\ sen\ (\frac{1}{2m})$

Así para cada valor tenemos:

$$arc\ sen\ \left(\frac{1}{2\ m_1}\right) = arc\ sen\ (\ 0{,}4067355406) = 24º$$

$$arc\ sen\ \left(\frac{1}{2\ m_2}\right) = arc\ sen\ (\ 0{,}9945300845) = 84º, 96º$$

$$arc\ sen\ \left(\frac{1}{2\ m_3}\right) = arc\ sen\ (-0{,}7431408103) = -42º$$

$$arc\ sen\ \left(\frac{1}{2\ m_4}\right) = arc\ sen\ (0{,}2079088528) = 21º$$

Las soluciones de la ecuación que resuelven nuestro problema son las dos primeras:

Así el ángulo pedido puede ser 24º y 96º.

Ricardo Barroso Campos

Profesor Jubilado

Universidad de Sevilla