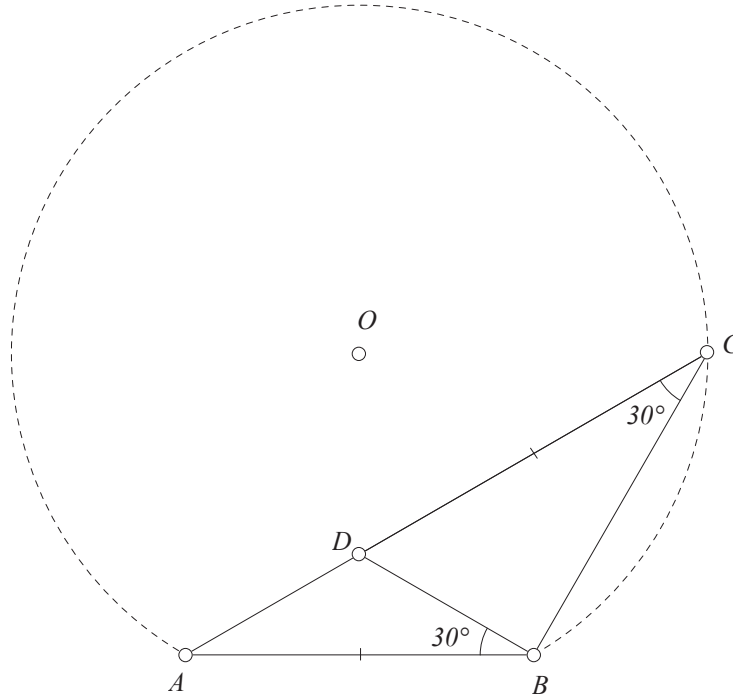


Problema 677. En el triángulo ABC , tenemos D sobre el interior del lado AC con $DC = AB$. Es también $\angle ABD = \angle BCA = 30^\circ$. Hallar $\angle BAC$.

Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat, de Perú

Soluzione di Ercole Suppa.



Risolviamo il problema usando un sistema di coordinate cartesiane con origine nel punto A e con asse delle x la retta BC . Svolgiamo i calcoli usando MATHEMATICA ed il pacchetto `cartesianas.nb`¹.

```
<< cartesianas`;  
ptA = {0, 0}; ptB = {c, 0};
```

Scriviamo l'equazione della circonferenza Γ di centro $O\left(\frac{c}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$ e raggio $AB = c$, luogo dei punti che vedono il segmento AB sotto angolo di 30° .

```
ptO = {c/2, sqrt(3)c/2}; ptP = {x, y};  
luogo = Simplify[Total[(ptO - ptP)^2] - c^2]
```

$$x^2 + y^2 - c(x + \sqrt{3}y)$$

Il punto C è l'intersezione di Γ con una generica retta passante per A , di equazione $y = mx$:

```
ptC = Factor[{x, y} /. Solve[{luogo == 0, y - m x == 0}, {x, y}][[2]]]
```

$$\left\{ \frac{c(1 + \sqrt{3}m)}{1 + m^2}, \frac{cm(1 + \sqrt{3}m)}{1 + m^2} \right\}$$

Senza perdita di generalità possiamo supporre che C si trova del semipiano di equazione $y \geq 0$ e quindi che

$$m(1 + \sqrt{3}m) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \leq -\frac{1}{\sqrt{3}} \vee m \geq 0$$

¹Pacchetto scritto dal mio amico Francisco Javier García Capitán, <http://garciacapitan.auna.com>

Il punto D è l'intersezione dell'asse di OA con la retta AC

```
ptD = Interseccion[Mediatriz[pt0, ptA], RectaDosPuntos[ptA, ptC]]
```

$$\left\{ \frac{c(1 + \sqrt{3}m)}{1 + 2\sqrt{3}m + 3m^2}, -\frac{cm - \sqrt{3}cm^2}{1 + 2\sqrt{3}m + 3m^2} \right\}$$

Determiniamo per quali valori di m (con $m \leq -\frac{1}{\sqrt{3}} \vee m \geq 0$) risulta che $OD < AB$ e $CD = AB$:

```
eq = Last[Numerator[Factor[CuadradoDistancia[ptC, ptD] - c^2]]]
```

$$-1 - 4\sqrt{3}m - 7m^2 + 16\sqrt{3}m^3 + 61m^4 + 20\sqrt{3}m^5 + 3m^6$$

```
sols = Select[ToRadicals[m /. FullSimplify[Solve[eq == 0, m]]] // N,
```

```
And[Or[# > 0, # < -1/Sqrt[3]], (Total[(pt0 - ptD)^2] - c^2 /. {c -> 1, m -> #}) < 0] &]
```

```
{-9.51436, 0.445229}
```

Dato che $m = \tan(\angle CAB)$, abbiamo che $\angle CAB = \arctan(m)$:

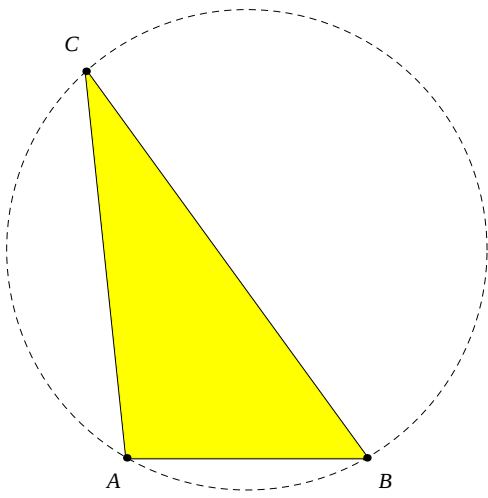
```
angoloBAC = Mod[180 ArcTan[sols]/Pi, 180]
```

```
{96., 24.}
```

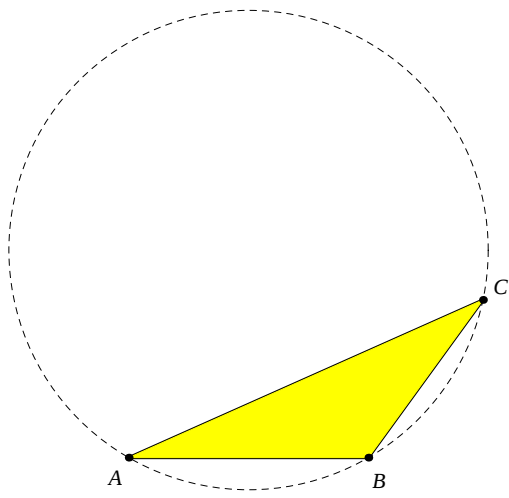
I triangoli $\triangle ABC$ che verificano le condizioni richieste hanno $\angle CAB \in \{96^\circ, 24^\circ\}$.

Per completezza riportiamo il codice MATHEMATICA utilizzato per costruire le figure

```
In[37]:= HacerDibujo[c_, m_] := Module[{instr},
  ptA = {0, 0}; ptB = {c, 0}; pt0 = {c/2, (sqrt[3] c)/2}; ptC = {c(1 + sqrt[3] m)/(1 + m^2), cm(1 + sqrt[3] m)/(1 + m^2)};
  instr = {
    Thick,
    Line[{ptA, ptB, ptC, ptA}],
    Thin,
    Yellow,
    Polygon[{ptA, ptB, ptC, ptA}],
    Black, Dashed,
    Circle[pt0, c],
    Black,
    PointSize[0.015],
    Map[Point, {ptA, ptB, ptC}],
    Text[Style["A", Black, Italic, 14], ptA + {0, -0.2}, {0, 1}],
    Text[Style["B", Black, Italic, 14], ptB + {0, -0.2}, {0, 1}],
    Text[Style["C", Black, Italic, 14], ptC + {1, 1}, {0, 1}],
    Text[Style["Angolo(BAC)=", Black, Italic, 14], ptA + {+2, -5}, {0, 1}],
    Text[Style[Mod[180 ArcTan[m]/Pi, 180], Black, Italic, 14], ptA + {+6, -5}, {0, 1}]
  };
  Show[Graphics[instr], AspectRatio -> Automatic]
]
GraphicsRow[Table[HacerDibujo[10, sols[[i]]], {i, 1, 2}], ImageSize -> 700]
```



$\text{Angolo}(BAC) = 96$.



$\text{Angolo}(BAC) = 24$.