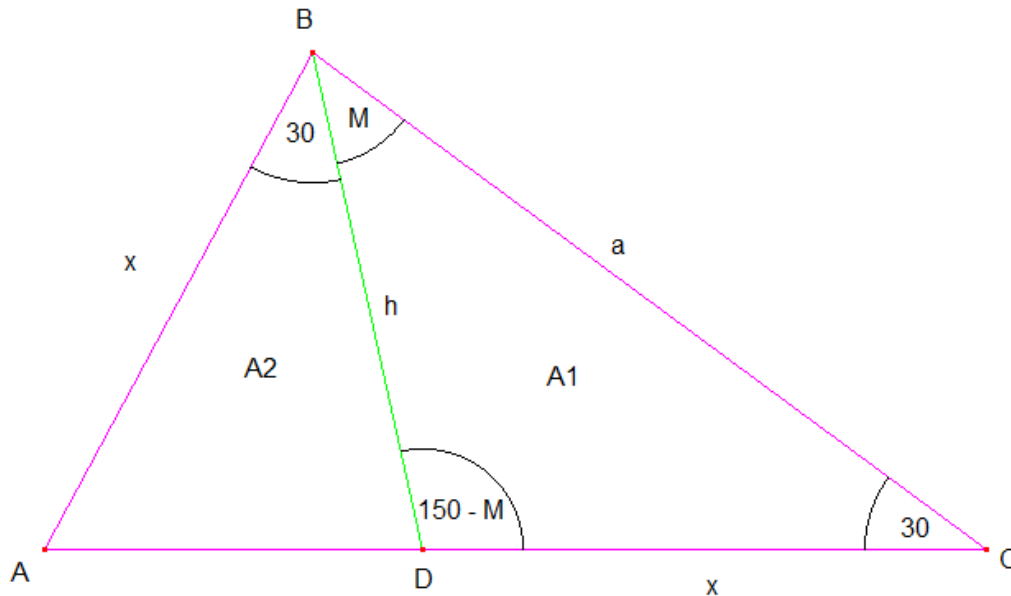


Problema 677

En el triángulo ABC, tenemos D sobre el interior del lado AC con $DC=AB$. Es también $\angle ABD = \angle BCA = 30^\circ$. Hallar $\angle BAC$.

Anónimo

Solución de Inocencio Esquivel García



$$\text{Área del triángulo DBC : } A_1 = \frac{ax \sin 30}{2} \quad \text{área del triángulo ABD: } A_2 = \frac{hx \sin 30}{2}$$

$$\text{Área del triángulo ABC : } A = \frac{ax \sin(30 + M)}{2} \quad y \quad A = A_1 + A_2$$

$$\frac{ax \sin(30 + M)}{2} = \frac{ax \sin 30}{2} + \frac{hx \sin 30}{2}$$

$$ax \sin 30 + M = \frac{ax}{2} + \frac{hx}{2} \quad \text{que se tiene } a \sin 30 + M = \frac{a}{2} + \frac{h}{2}$$

Por teorema del seno se tiene que

$$\frac{a}{\sin(150 - M)} = \frac{h}{\sin 30} = 2h \quad \text{es decir que } h = \frac{a}{2 \sin(150 - M)} \quad \text{Remplazando}$$

$$a \sin 30 + M = \frac{a}{2} + \frac{a}{4 \sin(150 - M)} \quad \text{se cancela } a$$

$$2\operatorname{sen} 30 + M = 1 + \frac{1}{2\operatorname{sen}(150 - M)}$$

Haciendo la sustitución $\operatorname{Sen} 30 + M = \operatorname{Sen} 150 - M = t$

$$2t = 1 + \frac{1}{2t} = \frac{2t + 1}{2t} \text{ se tiene entonces la ecuación } 4t^2 = 2t + 1$$

Resolvemos la ecuación $4t^2 - 2t - 1 = 0$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$\operatorname{Sen} 30 + M = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$30 + M = \operatorname{sen}^{-1} \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = 54$$

Por tanto $M = 24$ y como el ángulo $BAC = 180 - 30 - (30 + M)$

Tenemos que **ángulo $ABC = 180 - 30 - 54 = 96$**

Como $\operatorname{sen}(30+M) = \operatorname{sen}(180 - (30 + M)) = \operatorname{sen} (150 - M)$

$$\text{Tenemos } \operatorname{Sen} 150 - M = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$150 - M = \operatorname{sen}^{-1} \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = 54 \text{ de donde } M = 96$$

Entonces también puede ser Ángulo $BAC = 180 - 30 - (30 + M) = 180 - 156 = 24$

Luego otra solución es **ángulo $ABC = 24$**

Tomando la otra solución del radical

$$\operatorname{Sen} 30 + M = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \text{ queda } M = -18$$

que no tiene sentido, en ninguno de los dos casos