

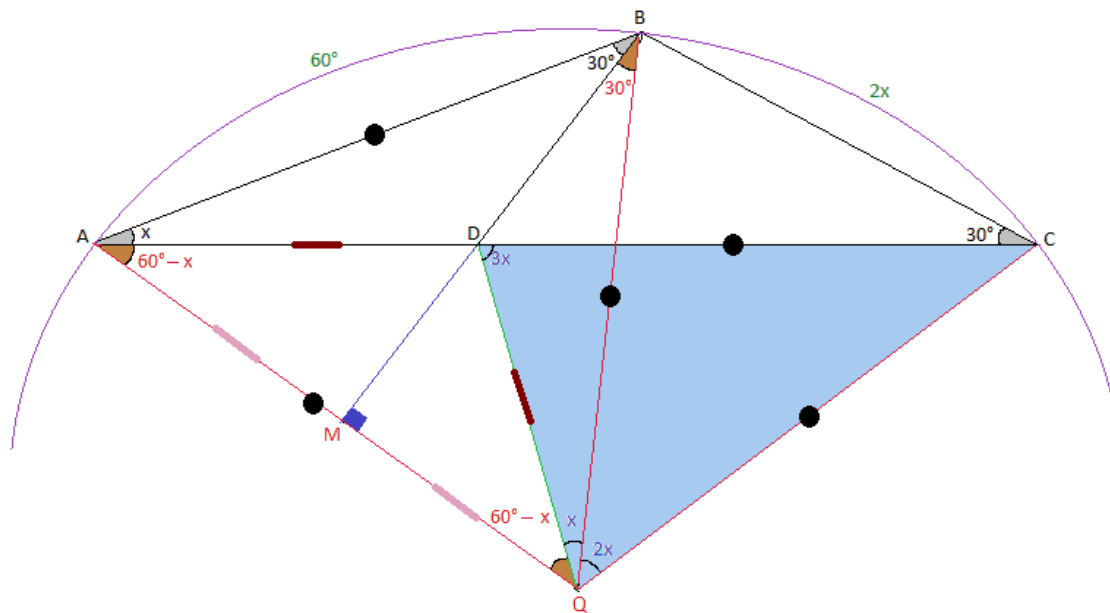
Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat, de Perú

Problema 677

En el triángulo ABC, tenemos D sobre el interior del lado AC con $DC=AB$. Es también $\angle ABD = \angle BCA = 30^\circ$. Hallar $\angle BAC$.

Anónimo

Solución de Julio A. Miranda Ubaldo, profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat, de Perú:



Ubiquemos el circuncentro Q del $\triangle ABC$ en el exterior de dicho triángulo.

Unamos A, B y C con Q, luego: $AQ = QB = QC$.

En el $\triangle ABC$: $m\angle C = 30^\circ$, entonces: $m\widehat{AB} = 60^\circ$, por lo tanto $m\angle BQA = 60^\circ$.

Se demuestra que el $\triangle ABQ$ es equilátero.

En dicho triángulo $m\angle DBQ = 30^\circ$ y $m\angle DAQ = 60^\circ - x$.

Prolongo BD de modo tal que corte a AQ en M, luego BM es bisectriz, altura, mediana y mediatriz.

Unamos D y Q luego el $\triangle ADQ$ es isósceles ($AD = DQ$), entonces $m\angle DQA = 60^\circ - x$.

En Q: $m\angle DQB = x$.

De otro lado en el $\triangle ABC$: Si $m\angle A = x$ entonces: $m\widehat{BC} = 2x$ (por ángulo inscrito)

Y $m\angle BQC = 2x$ (por ángulo central)

Se observa además que el $\triangle DQC$ es isósceles ($CD = CQ$) entonces: $m\angle D = m\angle Q = 3x$

Finalmente en el $\triangle ADQ$: $60^\circ - x + 60^\circ - x = 3x$

Luego: $x = 24^\circ$