

Problema 677

Problema 677

En el triángulo $\triangle ABC$, tenemos D sobre el interior del lado $\overline{AC}$ con $\overline{DC} = \overline{AB}$. Es también $\angle ABD = \angle BCA = 30^\circ$. Hallar $\angle BAC$.

Anónimo

Solución Ricard Peiró:

Sea $\overline{DC} = \overline{AB} = c$.

Sea $\alpha = \angle BAC$

Sea DE la paralela al lado $\overline{AB}$.

$\angle EDC = \angle BAC = \alpha$, $\angle ABD = \angle BCA = 30^\circ$.

Entonces, los triángulos $\triangle BDA$, $\triangle CDE$ son iguales.

Sea $x = \overline{BD} = \overline{CE}$, $y = \overline{AD} = \overline{DE}$.

Los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle DEC$ son semejantes.

Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{c+y}{c} = \frac{c}{y}.$$

$$\frac{c}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Sea $\beta = \angle DEC$.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\triangle CDE$:

$$\frac{c}{\sin \beta} = \frac{y}{\sin 30^\circ}.$$

$$\sin \beta = \frac{c}{y} \sin 30^\circ = \frac{\Phi}{2}. \text{ Entonces, } \beta = 126^\circ.$$

Si $\beta = 54^\circ$, aleshores, $\alpha = \angle BAC = 180^\circ - (30^\circ + \beta) = 96^\circ$.

Si $\beta = 126^\circ$, aleshores, $\alpha = \angle BAC = 180^\circ - (30^\circ + \beta) = 24^\circ$.

