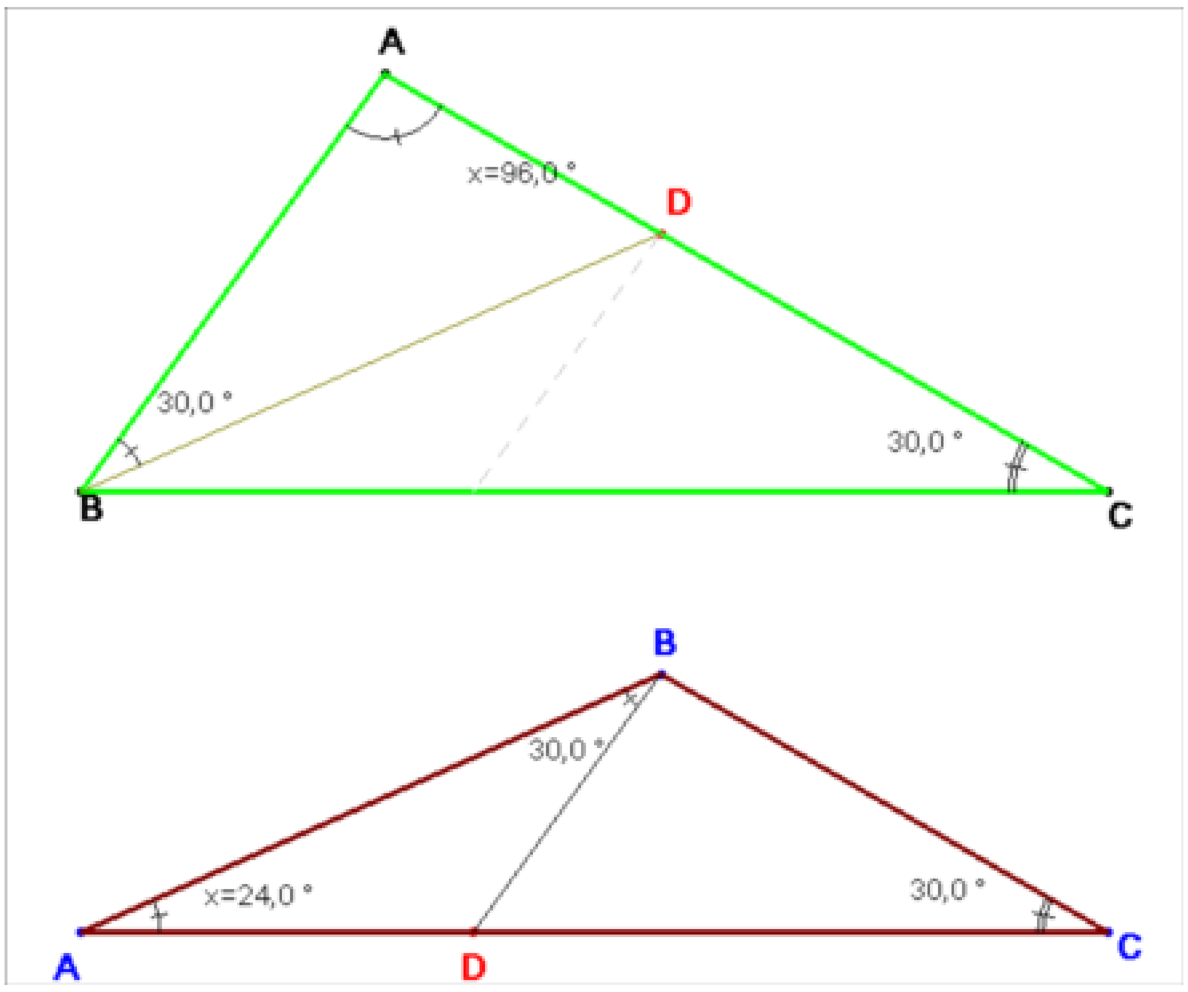
Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat, de Perú.

***Problema 677***.- *En el triángulo ABC, tenemos D sobre el interior del lado AC con DC=AB. Es también $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BCA = 30º$. Hallar $\sphericalangle BAC$.*

Anónimo.

**Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.**




En los triángulos $ABD$ y $BCD$, aplico el teorema de los senos obteniendo:

$$\frac{AB}{sen(150-x)} = \frac{BD}{sen\ x}$$

$$\frac{CD}{sen(120-x)} = \frac{BD}{sen\ 30}$$

Dividiéndolas entre sí se obtiene la ecuación trigonométrica

$$\frac{sen(120-x)}{sen(150-x)} = \frac{1}{2sen\ x}$$

O bien

$$2 \cdot senx \cdot sen(60+x) = sen(30+x)$$

Usando las identidades

$$2 \cdot senx \cdot sen(60+x) = \cos(x-60-x) - \cos(x+60+x) = \tfrac{1}{2} - \cos\big(2(x+30)\big) = \tfrac{1}{2} - (1 - 2sen^2(x+30))$$

Por tanto la ecuación trigonométrica que hay que resolver es:

$$2sen^2(x+30) - sen(x+30) - \frac{1}{2} = 0$$

Solamente sirve la solución positiva de esa ecuación (el ángulo buscado es menor de 150º). Se obtiene

$$sen(x+30) = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{5}).$$

Esta última ecuación en $sen(x+30)$, proporciona las soluciones $x+30 = 54º$, y la suplementaria, $x+30 = 126º$. Por tanto las dos soluciones del problema son $x = 24º$ y $x = 96º$.

Es fácil observar que a partir de una de las soluciones trazando por el punto $D$ una paralela a $AB$ se obtiene la otra.■