Problema 678, propuesto por Ricard Peiró i Estruch, Valencia:

Hallar el coseno del ángulo α a la base de un triángulo isósceles si se sabe que el punto de intersección de sus alturas se encuentra en la circunferencia inscrita en el triángulo (el ángulo α es aquel que se repite en el isósceles).

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo:

Sean ABC el triángulo isósceles dado, a, a y b las longitudes de sus lados, p su semiperímetro, S su área, H su ortocentro, I su incentro y R y r los radios de sus circunferencias circunscrita e inscrita, respectivamente. Entonces

$$S = pr = \frac{1}{2}(a+a+b)r = \frac{1}{2}\left(2R\operatorname{sen}\alpha + 2R\operatorname{sen}\alpha + 2R\operatorname{sen}(\pi - 2\alpha)\right)r = Rr\left(2\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}(2\alpha)\right) = 2Rr(1+\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$$

y $S = \frac{1}{2}aa\operatorname{sen}(\pi - 2\alpha) = \frac{1}{2}4R^2\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}(2\alpha) = 4R^2\operatorname{sen}^3\alpha\cos\alpha$, luego

$2Rr(1+\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha = 4R^2\operatorname{sen}^3\alpha\cos\alpha$, con lo cual $r(1+\cos\alpha) = 2R\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha$, es decir,

$r(1+\cos\alpha) = 2R(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)\cos\alpha$, siendo entonces $r = 2R(1-\cos\alpha)\cos\alpha$.

Ahora bien, según el enunciado H se encuentra sobre la circunferencia inscrita en ABC, con lo cual H debe estar situado a una distancia de I igual al radio r de dicha circunferencia. Teniendo en cuenta que $\alpha \in (0, \pi/2)$, de la conocida igualdad (*) $HI^2 = 2r^2 - 4R^2\cos\alpha\cos\alpha\cos(\pi - 2\alpha)$, resulta que $r^2 = HI^2 = 2r^2 + 4R^2\cos^2\alpha\cos(2\alpha)$, luego $-r^2 = 4R^2\cos^2\alpha\cos(2\alpha)$ y, como $r = 2R(1-\cos\alpha)\cos\alpha$, se deduce que $-4R^2(1-\cos\alpha)^2\cos^2\alpha = 4R^2\cos^2\alpha\cos(2\alpha)$, es decir, $-(1-\cos\alpha)^2 = \cos(2\alpha)$, o equivalentemente, $-\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 2\cos^2\alpha - 1$, o sea, $(3\cos\alpha - 2)\cos\alpha = 0$, con lo cual $3\cos\alpha - 2 = 0$, siendo así $\cos\alpha = 2/3$ el valor pedido.

(*) *Geometric inequalities*; Bottema, O., Djordjević, R. Ž., Janić, R. R., Mitrinović, D. S. & Vasić, P. M., Wolters-Noordhoff, Groningen, 1969, igualdad (3) de la prueba de las desigualdades 5.8, página 50.