Propuesto por Ricard Peiró i Estruch Profesor de Matemáticas del IES "Abastos" (Valencia)

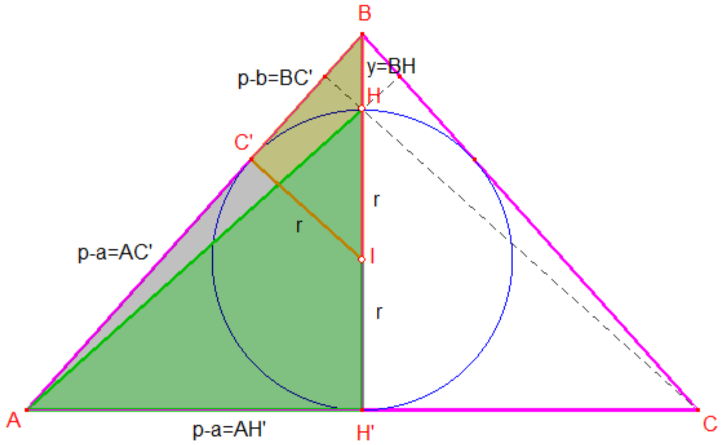
<u>Problema 678</u>

Hallar el coseno del ángulo α de la base de un triángulo isósceles si se sabe que el punto de intersección de sus alturas se encuentra en la circunferencia inscrita en el triángulo.
(El ángulo α es aquel que se repite en el triángulo isósceles)

Dorofeiev, G. y otros (1973): Temas selectos de matemáticas elementales. Editorial Mir.
(Página 353. problema 43)

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Sea dado el triángulo isósceles ABC y su circunferencia inscrita. Marcamos en ella el punto H, ortocentro del mismo. Por la simetría del triángulo isósceles ABC, el punto H debe ser el punto diametralmente opuesto al pie de la altura trazada desde el vértice B.



Observamos en la figura las relaciones de semejanza existentes entre los triángulos rectángulos siguientes:

$$(I)\quad BAH' \quad \alpha = \angle BAH'$$
$$(II)\quad BIC' \quad \alpha = \angle BIC'$$
$$(III)\quad AHH' \quad \alpha = \angle AHH'$$

De dichas semejanzas, obtenemos las siguientes proporciones entre sus lados homólogos:

$$tag\alpha = \frac{2r+y}{p-a} = \frac{p-b}{r} = \frac{p-a}{2r}$$

De la segunda igualdad, deducimos que:

$$p-b = \frac{p-a}{2}$$

Y así, tenemos que:

$$p-a = \frac{b}{2} \to p = \frac{5b}{4}$$

De la igualdad, $\frac{2r+y}{p-a} = \frac{p-b}{r}$, deducimos que:

$$(2r+y)r = (p-a)(p-b)$$

Ahora bien, por la potencia del punto H respecto de la circunferencia inscrita: $(2r+y)y = (p-b)^2$

De estas dos últimas expresiones, tenemos que

$$\frac{y}{r} = \frac{p-b}{p-a} = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}r.$$

Por tanto, en el triángulo BC'I, podemos calcular ya el coseno del ángulo α:

$$\cos\alpha = \frac{r}{\frac{3}{2}r} = \frac{2}{3}$$

También deducimos el valor de $b = 2\sqrt{5}r$ a partir de la igualdad pitagórica $IC'^2 + C'B^2 = IB^2$.

$$\left(\frac{b}{4}\right)^2 + r^2 = \left(\frac{3}{2}r\right)^2 \to \frac{b^2}{16} + r^2 = \frac{9}{4}r^2 \to b^2 = 20r^2 \to b = 2\sqrt{5}r$$

<u>Su construcción:</u>

En primer lugar y una vez dibujada una circunferencia de radio r, trazaremos un diámetro en la misma, HH'.
Por el punto H' trazamos un segmento perpendicular al diámetro HH', de longitud $\frac{b}{2} = \sqrt{5}r$.

De esta forma, obtenemos uno de los vértices en la base. Sea A éste y C, su simétrico respecto H'.
El tercer vértice B lo podemos construir prolongando el diámetro H'H una longitud igual HB = ½ r.