Propuesto por Ricard Peiró i Estruch Profesor de Matemáticas del IES "Abastos" (València)

Problema 678

43. Hallar el coseno del ángulo α a la base de un triángulo isósceles si se sabe que el punto de intersección de sus alturas se encuentra en la circunferencia inscrita en el triángulo.

43. Hallar el coseno del ángulo α a la base de un triángulo isósceles si se sabe que el punto de intersección de sus alturas se encuentra en la circunferencia inscrita en el triángulo

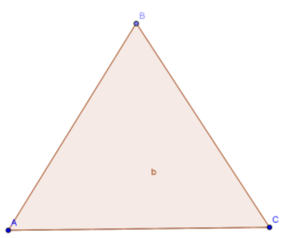
(El ángulo α es aquel que se repite en el iósceles)

Dorofeiev, G. y otros (1973) :Temas selectos de matemáticas elementales. Ed Mir .

(Página 353. problema 43)

Solución del director

Tenemos que:



En un isósceles A B C donde la base es b y los lados iguales son a , a, tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{b/2}{a} = \frac{b}{2a} \to \mathrm{b} = 2\mathrm{a}\cos\alpha$$

Por otra parte, el inradio en un triángulo isósceles es:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{a+a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+a+b}{2} - b\right)}{\frac{a+a+b}{2}}}$$

De donde,

$$2r = \sqrt{\frac{b^2(2a-b)}{2a+b}}$$

De esta manera lo pedido por el problema es que sea:
El ortocentro H debe estar sobre la inscrita:
Así si B_1 es el punto medio de AC, el triángulo AHB_1 deberá ser semejante al BCB_1.
De ello se tiene que

$$\cos\alpha = \cos AHB_1 = \frac{HB_1}{AH} = \frac{2r}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (2r)^2}}$$

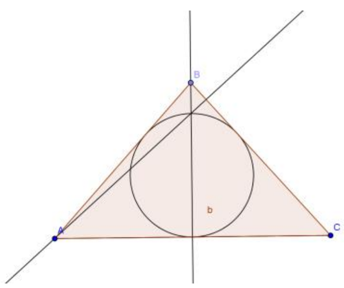
O sea, desarrollando y simplificando:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{8a-4b}{10a-3b}}$$

De donde sustituyendo el valor hallado de b , tenemos la ecuación cúbica:
$6(cos\ \alpha)^3 - 10\ (cos\ \alpha)^2 - 8\cos\alpha + 8 = 0$
Por Rufini se obtiene inmediatamente

$$\cos\alpha = -1, \cos\alpha = 2, \cos\alpha = 2/3$$

La primera solución da el triángulo degenerado, la segunda no resuleve por los posibles valores del coseno y la tercera es la solución pedida.



Valga indicar que $\alpha \approx 48{,}15º$
Ricardo Barroso Campos.
Profesor jubilado de la Universidad de Sevilla.