

Problema 678

Propuesto por Ricard Peiró i Estruch Profesor de Matemáticas del IES "Abastos" (València)

43. Hallar el coseno del ángulo α a la base de un triángulo isósceles si se sabe que el punto de intersección de sus alturas se encuentra en la circunferencia inscrita en el triángulo.

43. Hallar el coseno del ángulo α a la base de un triángulo isósceles si se sabe que el punto de intersección de sus alturas se encuentra en la circunferencia inscrita en el triángulo(El ángulo α es aquel que se repite en el iósceles)

Dorofeiev, G. y otros (1973) :Temas selectos de matemáticas elementales. Ed Mir .(Página 353. problema 43)

Solución de Fabiola Czwienckez, profesora de Matemática (jubilada). Turmero, Venezuela.

Sea MNP el triángulo isósceles dado, con $MP = MN$ y $m\angle MPN = m\angle MNP = \alpha$. Debemos hallar el coseno de α .

Establezcamos un sistema de coordenadas cartesianas (cuyo origen es O) de tal manera que los puntos N y P estén en el eje x y el punto M esté en el eje y . Sean $(0, m)$, $(n, 0)$ y $(-n, 0)$ las coordenadas de los puntos M , N y P , respectivamente, con $m \neq 0$ y $n \neq 0$. Denotemos por T al punto de intersección de las alturas del triángulo MNP . Es decir, T es el ortocentro del triángulo MNP . Denotemos por C al centro de la circunferencia inscrita al triángulo MNP . Esto es, C es el incentro del triángulo MNP . Nótese que:

- 1) $\overline{MO}$ es la altura del triángulo MNP correspondiente al vértice M (figura 1). Como por hipótesis, el ortocentro T está en la circunferencia inscrita, se tiene que T está en el interior del segmento $\overline{MO}$. El triángulo MNP es, por tanto, acutángulo.
- 2) $\overline{MO}$ está contenido en la bisectriz del ángulo PMN (figura 2). Luego, el incentro C está en el interior del segmento $\overline{MO}$.
- 3) la circunferencia inscrita en un triángulo isósceles es tangente a la base en su punto medio. En este caso, el punto O es el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con el segmento $\overline{PN}$

En consecuencia, tenemos que los puntos T , C y O están alineados. Además, T y O pertenecen a la circunferencia inscrita cuyo centro es C . Se deduce que T y O son extremos de un diámetro y que $CT = CO = \frac{TO}{2}$. En la figura 3 se ilustra la situación.

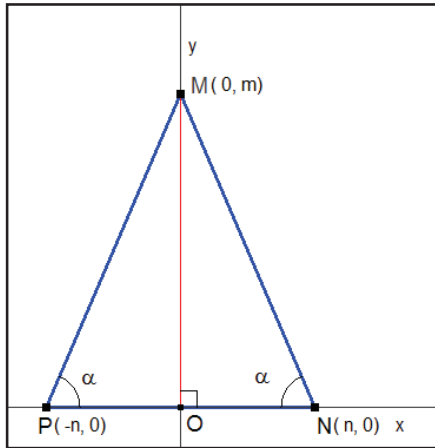


Figura 1

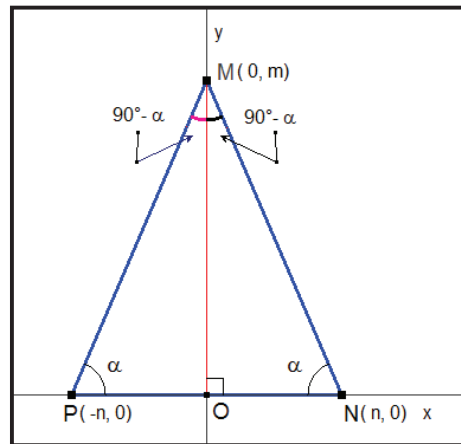


Figura 2

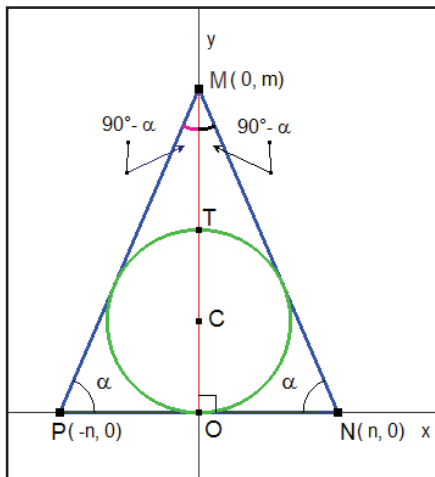


Figura 3

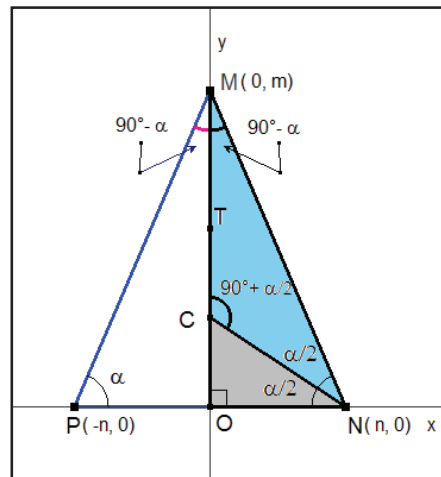


Figura 4

En referencia a la figura 4, tenemos que:

$$\cos \alpha = \frac{PO}{PM} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + m^2}} \quad (1)$$

A continuación, encontraremos la relación que existe entre m y n , la cual nos permitirá expresar una de estas variables en función de la otra. Para ello, consideremos los triángulos OCN y NCM.

Del triángulo rectángulo OCN, tenemos que

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{CO}{ON} \quad (2)$$

Recordemos que $CO = \frac{TO}{2}$. Nótese que T es el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones son $y = \frac{n}{m}(x + n)$ y $x = 0$. Así, las coordenadas de T son $(0, \frac{n^2}{m})$. Luego, $OT = \frac{n^2}{m}$ y $CO = \frac{n^2}{2m}$. Por otra parte, $ON = n$. Sustituyendo en (2), obtenemos

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{n}{2m} \quad (3)$$

Por otra parte, aplicando ley de los senos en el triángulo NCM,

$$\frac{MN}{\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{MC}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (4)$$

Nótese que:

$$MN = \sqrt{n^2 + m^2}; \quad \sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right); \quad MC = MO - CO = m - \frac{n^2}{2m} = \frac{2m^2 - n^2}{2m}.$$

Sustituyendo en (4):

$$\frac{\sqrt{n^2 + m^2}}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\frac{2m^2 - n^2}{2m}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

De donde:

$$\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2m^2 - n^2}{2m\sqrt{n^2 + m^2}} \Rightarrow \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2m^2 - n^2}{2m\sqrt{n^2 + m^2}} \quad (5)$$

De (3) y (5):

$$\frac{n}{2m} = \frac{2m^2 - n^2}{2m\sqrt{n^2 + m^2}} \Rightarrow n = \frac{2m^2 - n^2}{\sqrt{n^2 + m^2}}$$

$$\Rightarrow n^2(n^2 + m^2) = (2m^2 - n^2)^2$$

$$\Rightarrow n^4 + n^2 m^2 = 4m^4 - 4m^2 n^2 + n^4$$

$$\Rightarrow 5n^2 m^2 = 4m^4$$

$$\Rightarrow 5n^2 = 4m^2$$

$$\Rightarrow m^2 = \frac{5n^2}{4} \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en (1):

$$\cos \alpha = \frac{n}{\sqrt{n^2+m^2}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+\frac{5n^2}{4}}} = \frac{n}{\sqrt{\frac{4n^2+5n^2}{4}}} = \frac{2n}{\sqrt{9n^2}} = \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$$

Así, el coseno de α es $\frac{2}{3}$.

Nota: α es aproximadamente $48,19^\circ$.