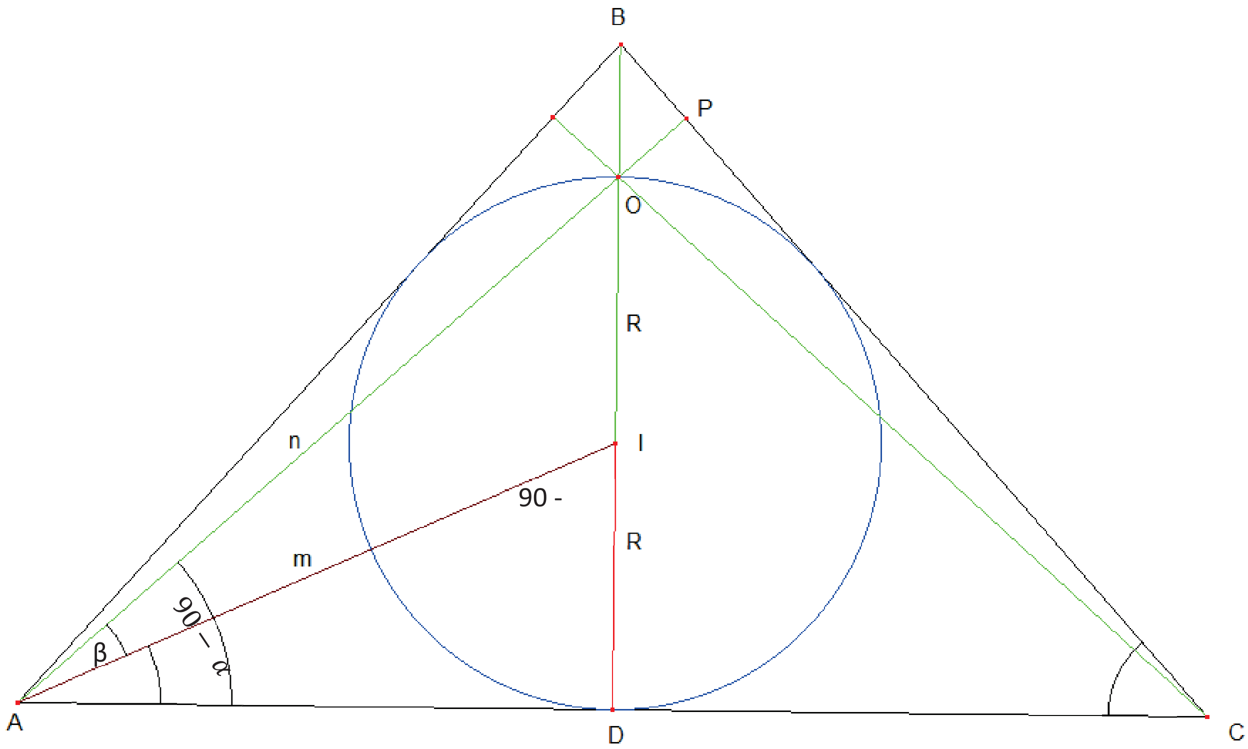
Problema 678

43. Hallar el coseno del ángulo α a la base de un triángulo isósceles si se sabe que el punto de intersección de sus alturas se encuentra en la circunferencia inscrita en el triángulo.

Hallar el coseno del ángulo α a la base de un triángulo isósceles si se sabe que el punto de intersección de sus alturas se encuentra en la circunferencia inscrita en el triángulo

(El ángulo α es aquel que se repite en el isósceles)
Dorofeiev, G. y otros (1973) :Temas selectos de matemáticas elementales. Ed Mir
.
Solución de Inocencio Esquivel García.



Utilizando el teorema del coseno en el triángulo OAI

$R^2 = m^2 + n^2 - 2mncos\beta$ $\quad$ *Podemos ver que* $\beta = 90 - \alpha - \frac{\alpha}{2} = 90 - \frac{3\alpha}{2}$

Los triángulos ADI y ADO son rectángulos por tanto.

$m = \dfrac{R}{sen\ \frac{\alpha}{2}}$ $\quad$ $n = \dfrac{2R}{sen\ 90 - \alpha}$ $\quad$ *Remplazando tenemos:*

$$R^2 = \quad \frac{R}{sen\ \frac{\alpha}{2}}^{2} + \frac{2R}{sen\ \ 90-\alpha}^{2} - 2\frac{R}{sen\ \frac{\alpha}{2}}\frac{2R}{sen\ \ 90-\alpha}cos\beta$$

$$1 = \frac{1}{sen^2\ \frac{\alpha}{2}} + \frac{4}{cos^2\ \ \alpha} - \frac{4cos\ \ 90 - \frac{3\alpha}{2}}{sen\frac{\alpha}{2}sen\ \ 90-\alpha}$$

$$1 = \frac{1}{sen^2\ \frac{\alpha}{2}} + \frac{4}{cos^2\ \ \alpha} - \frac{4sen\frac{3\alpha}{2}}{sen\frac{\alpha}{2}cos\alpha}$$

Se trata ahora de resolver esta ecuación para hallar el valor del ángulo α

Aplicando identidades trigonométricas

$$sen^2\ \frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{2}$$

$$sen\frac{3\alpha}{2} = sen\alpha\cos\ \frac{\alpha}{2} + sen\ \frac{\alpha}{2}\ cos\alpha = \overline{1-cos^2\alpha}\ \overline{\frac{1+cos\alpha}{2}} + \overline{\frac{1-cos\alpha}{2}}\ cos\alpha$$

Haciendo cosα = x

$$1 = \frac{2}{1-x} + \frac{4}{x^2} - \frac{4\ \ \overline{1-x^2}\ \overline{\frac{1+x}{2}} + \overline{\frac{1-x}{2}}\ x}{\overline{\frac{1-x}{2}}\ x}$$

$$1 = \frac{2}{1-x} + \frac{4}{x^2} - \frac{4\ \ \overline{\frac{1-x}{2}}\ \ \overline{2\ 1+x}\ \ \overline{\frac{1+x}{2}} + \overline{\frac{1-x}{2}}\ x}{\overline{\frac{1-x}{2}}\ x}\ \ Factorizando\ y\ cancelando$$

$$el\ término\ \ \overline{\frac{1-x}{2}}$$

$$1 = \frac{2}{1-x} + \frac{4}{x^2} - \frac{4\ \ \overline{2(1+x)}\ \overline{\frac{1+x}{2}} + x}{x} = \frac{2}{1-x} + \frac{4}{x^2} - \frac{4(\ 1+x\ \ +x)}{x}$$

$$1 = \frac{2}{1-x} + \frac{4}{x^2} - \frac{4+4x+4x}{x} = \frac{2}{1-x} + \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x} - 8$$

$$9 = \frac{2}{1-x} + \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x}$$

$$9 - \frac{2}{1-x} = \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x} = \frac{4-4x}{x^2}$$

$$\frac{9-9x-2}{1-x} = \frac{4-4x}{x^2}$$

$$7x^2 - 9x^3 = 4x^2 - 8x + 4$$

$$-9x^3 + 3x^2 + 8x - 4 = 0 \; factorizando \; tenemos \quad -(x+1)(3x-2)^2 = 0$$

Luego tenemos dos soluciones

x = - 1 lo que nos daría que cosα = - 1 y α = 180 que no tendría sentido.

Tendríamos entonces la segunda solución x = 2/3

Es decir que **cosα = 2/3**