

Problema 678

43. Hallar el coseno del ángulo α a la base de un triángulo isósceles si se sabe que el punto de intersección de sus alturas se encuentra en la circunferencia inscrita en el triángulo.

Dorofeiev, G. y otros (1973) :Temas selectos de matemáticas elementales. Ed Mir .

(Página 353. problema 43)

Determineu el cosinus de l'angle α de la base d'un triangle isòsceles si se sap que el punt d'intersecció de les altures es troba en la circumferència inscrita al triangle.
Temas selectos de matemáticas elementales. Dorofeiev, G. y otros. Ed Mir 1973.
Página 353. problema 43.

Solució de Ricard Peiró i Estrch:

Siga el triangle isòsceles $\triangle ABC$ $\overline{AC} = \overline{CB}$.

Siga $\alpha = A = B$.

Siga I l'incientre. Siga r el radi de la circumferència inscrita.

Siga T el punt de tangència de la circumferència inscrita i el costat $\overline{BC}$.

Siga H l'ortocentre que pertany a la circumferència inscrita.

Siga D el peu de l'altura referida al vèrtex A.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Siga $h = \overline{CM}$ altura del triangle.

Per la propietat de l'ortocentre:

$$\overline{AH} \cdot \overline{HD} = \overline{CH} \cdot \overline{HM} \quad (1)$$

$$\overline{CH} = h - 2r, \quad \overline{HM} = 2r .$$

$$\overline{AH} \cdot \overline{HD} = (h - 2r)2r \quad (2)$$

$$\angle CIT = \angle CHD = \alpha .$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle $\triangle ITC$:

$$\cos \alpha = \frac{r}{h - r} \quad (3)$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle $\triangle CHD$:

$$\overline{HD} = (h - 2r) \cos \alpha \quad (4)$$

$$\angle ACM = 90^\circ - \alpha, \quad \angle DAB = 90^\circ - \alpha .$$

$$\angle CAH = 2\alpha - 90^\circ .$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle CHA$:

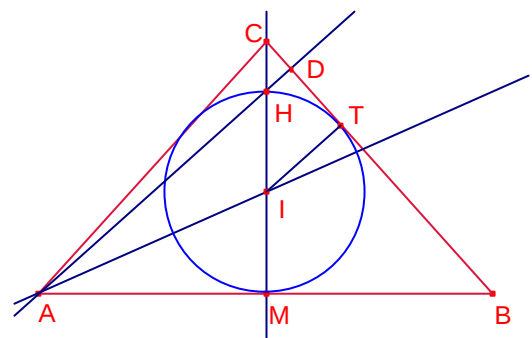
$$\frac{\overline{AH}}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\overline{CH}}{\sin(2\alpha - 90^\circ)} \quad (5)$$

$$\frac{\overline{AH}}{\cos \alpha} = \frac{h - 2r}{-\cos 2\alpha} \quad (6)$$

$$\overline{AH} = \frac{-\cos \alpha}{\cos 2\alpha} (h - 2r) \quad (7)$$

Substituint les expressions (4) (7) en l'expressió (2):

$$\frac{-\cos \alpha}{\cos 2\alpha} (h - 2r)(h - 2r) \cos \alpha = (h - 2r)2r \quad (8)$$



$$\frac{2r - h}{2r} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} = 2 - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (9)$$

Substituint l'expressió (3) en l'expressió (9):

$$\frac{2r - h}{2r} = 2 - \left(\frac{h - r}{r} \right)^2 \quad (10)$$

Simplificant:

$$5r = 2h \quad (11)$$

Substituint l'expressió (11) en l'expressió (3):

$$\cos \alpha = \frac{r}{h - r} = \frac{r}{\frac{5}{2}r - r} = \frac{2}{3}.$$