

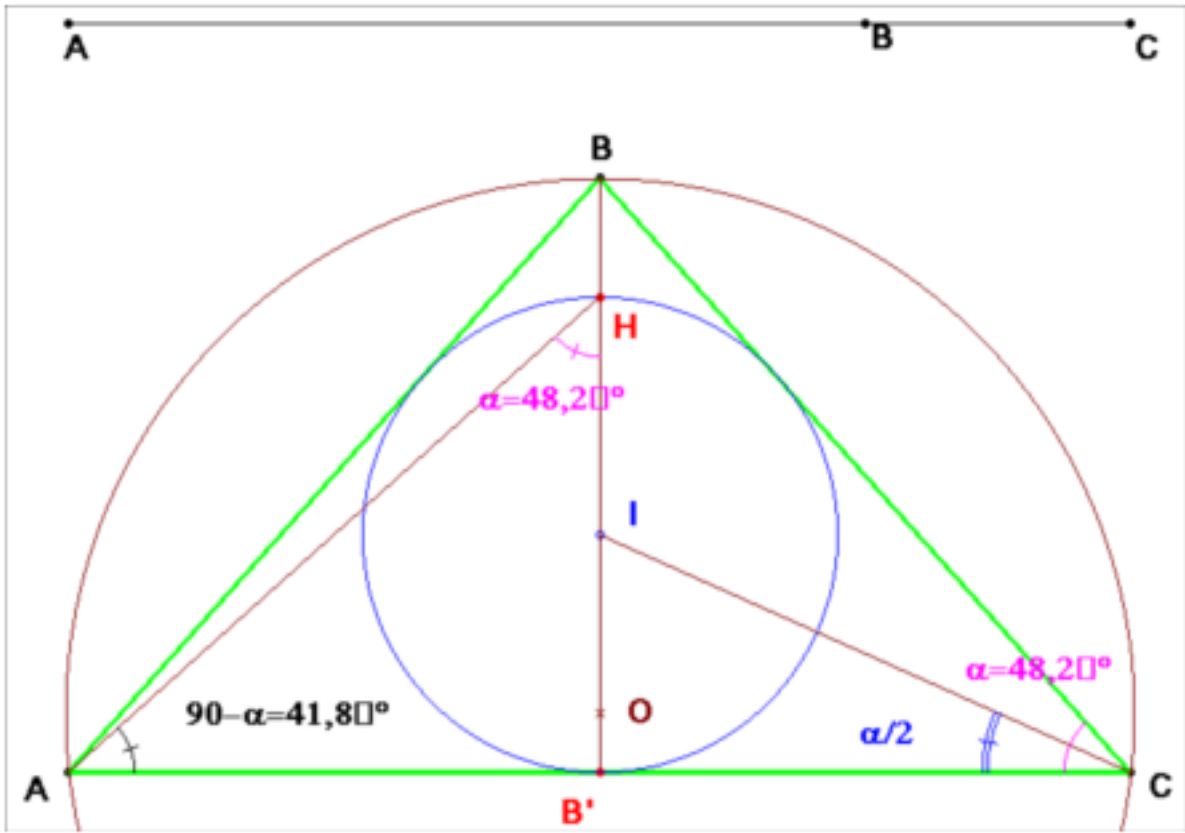
Problema 678.

43. Hallar el coseno del ángulo α de la base de un triángulo isósceles si se sabe que el punto de intersección de sus alturas se encuentra en la circunferencia inscrita en el triángulo.

(El ángulo α es aquél que se repite en el isósceles)

Dorofeiev, G y otros (1973): Temas selectos de matemáticas elementales. Ed. Mir. (Página 353, problema 43)

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Empleamos la notación usual en un triángulo ABC : lados opuestos a los vértices, a, b y c y radios de las circunferencias inscrita y circunscrita, r y R respectivamente. La condición sobre H , el ortocentro, obliga a que este punto sea el diametralmente opuesto al punto medio B' , de la base. Se tienen además $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = \alpha$, y $\sphericalangle ABC = 180 - 2\alpha$.

Observando la figura podemos calcular el valor de $\cos \alpha$ en el triángulo ABC y en el AHB' :

$$\cos \alpha = \frac{b}{2a} = \operatorname{sen}(90 - \alpha) = \frac{2r}{AH} \quad (1)$$

Ahora calculamos $AH = CH$ en $\triangle AHC$:

$$\frac{CH}{\operatorname{sen}(90 - \alpha)} = \frac{CA}{\operatorname{sen} 2\alpha}, \text{ o bien } \frac{AH}{\cos \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = 2R, \text{ de donde } AH = 2R \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

(en un triángulo isósceles los ángulos iguales son agudos, y por tanto, el coseno es positivo).

Combinando (1) y (2) llegamos a

$$\cos^2 \alpha = \frac{r}{R} \quad (3)$$

Concluiremos expresando r y R en términos de los datos del triángulo para concluir con la solución del problema.

Designando por Δ el área del triángulo y por $s = a + \frac{b}{2}$ su semiperímetro, tenemos

$$\frac{r}{R} = \frac{\Delta}{sR} = \frac{\Delta}{s} \cdot \frac{4\Delta}{abc} = \frac{4(s-a)^2(s-b)}{a^2b} = \frac{(2s-2a)^2(2s-2b)}{2a^2b} = \frac{b^2(2a-b)}{2a^2b} = \frac{b(2a-b)}{2a^2}$$

Así pues tenemos

$$\frac{b(2a-b)}{2a^2} = \cos^2 \alpha = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad (4)$$

Tomando los extremos de esta última expresión y simplificando llegamos a $2(2a-b) = b$, de donde $4a = 3b$, y el coseno buscado vale

$$\cos \alpha = \frac{b}{2a} = \frac{2}{3}.$$

Se podría resumir el problema diciendo que el triángulo isósceles de lados 3, 3 y 4 es el que tiene el ortocentro sobre su circunferencia inscrita. ■