Problema 679, propuesto por Ricard Peiró i Estruch, Valencia:

Hallar el coseno del ángulo α de la base de un triángulo isósceles si se sabe que el baricentro se encuentra en la circunferencia inscrita en el triángulo (el ángulo α es aquel que se repite en el isósceles).

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo:

Sean ABC el triángulo isósceles dado, a, a y b las longitudes de sus lados, p su semiperímetro, S su área, G su baricentro, I su incentro y R y r los radios de sus circunferencias circunscrita e inscrita, respectivamente. Entonces

$$S = pr = \frac{1}{2}(a+a+b)r = \frac{1}{2}\left(2R\operatorname{sen}\alpha + 2R\operatorname{sen}\alpha + 2R\operatorname{sen}(\pi-2\alpha)\right)r = Rr\left(2\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}(2\alpha)\right) = 2Rr(1+\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$$

y $S = \frac{1}{2}aa\operatorname{sen}(\pi-2\alpha) = \frac{1}{2}4R^2\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}(2\alpha) = 4R^2\operatorname{sen}^3\alpha\cos\alpha$, luego

$2Rr(1+\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha = 4R^2\operatorname{sen}^3\alpha\cos\alpha$, con lo cual $r(1+\cos\alpha) = 2R\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha$, es decir,

$r(1+\cos\alpha) = 2R(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)\cos\alpha$, siendo entonces $r = 2R(1-\cos\alpha)\cos\alpha$.

Ahora bien, según el enunciado G se encuentra sobre la circunferencia inscrita en ABC, con lo cual G debe estar situado a una distancia de I igual al radio r de dicha circunferencia. Teniendo en cuenta que $\alpha \in (0, \pi/2)$, de la conocida igualdad (*) $9GI^2 = p^2 + 5r^2 - 16Rr$, se deduce que $9r^2 = 9GI^2 = 4R^2(1+\cos\alpha)^2\operatorname{sen}^2\alpha + 5r^2 - 16Rr$, luego $r^2 = R^2(1+\cos\alpha)^2\operatorname{sen}^2\alpha - 4Rr$ y, como $r = 2R(1-\cos\alpha)\cos\alpha$, resulta que $4R^2(1-\cos\alpha)^2\cos^2\alpha = R^2(1+\cos\alpha)^2\operatorname{sen}^2\alpha - 8R^2(1-\cos\alpha)\cos\alpha$, o sea, $4(1-\cos\alpha)\cos^2\alpha = (1+\cos\alpha)^3 - 8\cos\alpha$, o equivalentemente, $(5\cos\alpha - 1)(\cos^2\alpha - 1) = 0$, con lo cual $5\cos\alpha - 1 = 0$, siendo así $\cos\alpha = 1/5$ el valor pedido.

(*) *Geometric inequalities*; Bottema, O., Djordjević, R. Ž., Janić, R. R., Mitrinović, D. S. & Vasić, P. M., Wolters-Noordhoff, Groningen, 1969, igualdad al final de la prueba de las desigualdades 5.8, página 51.