Propuesto por Ricard Peiró i Estruch, Profesor de Matemáticas del IES "Abastos" (València).

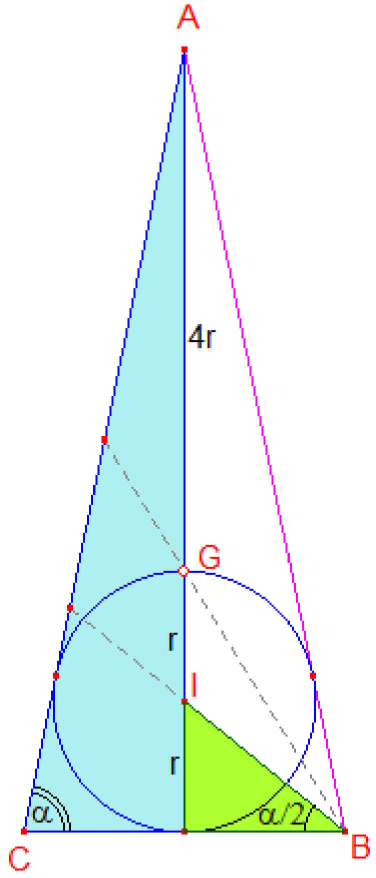
Problema 679

Hallar el coseno del ángulo α de la base de un triángulo isósceles si se sabe que el baricentro se encuentra en la circunferencia inscrita en el triángulo.

Peiró, R. (2013): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Sea dado el triángulo ABC. Marcamos los puntos I y G sobre la mediatriz del lado BC=a.



$$\left.\begin{array}{l} \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{\frac{a}{2}}=\frac{2r}{a} \\ \tan\alpha=\frac{6r}{\frac{a}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{2.\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{6r}{\frac{a}{2}}=\frac{2.\frac{2r}{a}}{1-\left(\frac{2r}{a}\right)^2}$$

$$\frac{12r}{a}=\frac{4ar}{a^2-4r^2} \Rightarrow \frac{3}{a}=\frac{a}{a^2-4r^2} \Rightarrow 3(a^2-4r^2)=a^2 \Rightarrow 2a^2=12r^2$$

Por tanto: $a^2=6r^2$.

De esta forma:

$$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{25}$$

En definitiva: $\cos\alpha=\frac{1}{5}$