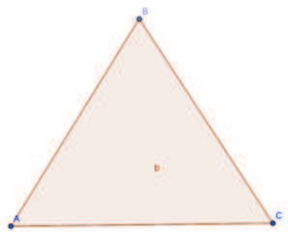
Hallar el coseno del ángulo α a la base de un triángulo isósceles si se sabe que el punto de intersección de sus medianas se encuentra en la circunferencia inscrita en el triángulo.

Ricard Peiró. 2013.

Solución de Ricardo Barroso

Tenemos que:



En un isósceles A B C donde la base es b y los lados iguales son a , a, tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{b/2}{a} = \frac{b}{2a} \rightarrow \mathrm{b} = 2\mathrm{a}\cos\alpha$$

Por otra parte, el inradio en un triángulo isósceles es:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{a+a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+a+b}{2}-b\right)}{\frac{a+a+b}{2}}}$$

De donde,

$$2r = \sqrt{\frac{b^2(2a-b)}{2a+b}} = \sqrt{\frac{4a^{\,2}\,(\cos\alpha)^2\,(2a-\ 2a\cos\alpha)}{2a+2a\cos\alpha}}$$

a mediana de B es:

$$m_b = \sqrt{\frac{4a^2-b^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2-4a^{\,2}\,(\cos\alpha)^2}{4}}$$

Si deseamos que el baricentro está situado en el incírculo, habrá de ser :

$1/3\ m_b = 2r$.

Es decir,

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4a^2-4a^{\,2}\,(\cos\alpha)^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^{\,2}\,(\cos\alpha)^2\,(2a-\ 2a\cos\alpha)}{2a+2a\cos\alpha}}$$

Simplificando y despejando tenemos

$$\cos\alpha = \frac{1}{5}$$

Aproximademente, es α=78,46º