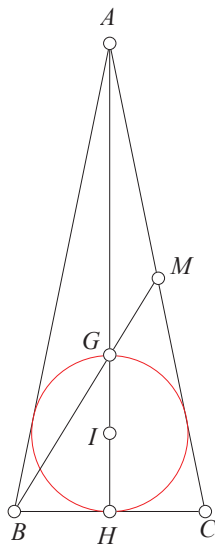


Problema 679. Hallar el coseno del ángulo α de la base de un triángulo isósceles si se sabe que el baricentro se encuentra en la circunferencia inscrita en el triángulo.

Propuesto por Ricard Peiró i Estruch Profesor de Matemáticas del IES Abastos (València)

Soluzione di Ercole Suppa

Sia $\triangle ABC$ isoscele con $BC = a$, $AB = AC = b$, sia AH l'altezza relativa alla base BC , sia I l'incentro, sia M il punto medio del lato AC , sia G il baricentro e sia p il semiperimetro.



Poichè $\triangle ABC$ è isoscele $G \in AH$. Pertanto se G appartiene alla circonferenza inscritta, allora G è il simmetrico di H rispetto ad I , come indicato in figura.

Dal teorema di Pitagora, usando le note formule

$$S = [ABC] = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r = \frac{S}{p}$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
 BG^2 &= BH^2 + GH^2 = \frac{a^2}{4} + 4r^2 = \\
 &= \frac{a^2}{4} + 4 \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2} = \\
 &= \frac{a^2}{4} + 4 \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = \\
 &= \frac{a^2}{4} + \frac{(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c} = \\
 &= \frac{a^2}{4} + \frac{(2b-a)a^2}{a+2b} = \frac{(10b-3a)a^2}{4(a+2b)} \quad (1)
 \end{aligned}$$

D'altra parte, essendo $BG = \frac{2}{3}BM$, dal teorema della mediana abbiamo:

$$BG^2 = \frac{4}{9} \cdot BM^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} (2a^2 + 2b^2 - b^2) = \frac{1}{9} (2a^2 + b^2) \quad (2)$$

Dalla (1) e la (2) segue che

$$\begin{aligned}
 \frac{(10b-3a)a^2}{4(a+2b)} &= \frac{1}{9} (2a^2 + b^2) \quad \Leftrightarrow \\
 \frac{(a-2b)(5a-2b)(7a+2b)}{36(a+2b)} &= 0 \quad \Leftrightarrow \\
 a = 2b \quad \vee \quad a &= \frac{2}{5}b
 \end{aligned}$$

Dato che $\triangle ABC$ è non degenere la soluzione $a = 2b$ non è accettabile.

Pertanto se $G \in (I)$ deve essere necessariamente $a = \frac{2}{5}b$ e da ciò segue che:

$$\cos \alpha = \cos(\angle ABC) = \frac{a^2 + b^2 - b^2}{2ab} = \frac{a}{2b} = \frac{1}{5}$$

□