

Propuesto por Ricard Peiró i Estruch Profesor de Matemáticas del IES "Abastos" (València)

Problema 679

Hallar el coseno del ángulo α de la base de un triángulo isósceles si se sabe que el baricentro se encuentra en la circunferencia inscrita en el triángulo.

Peiró, R. (2013): Comunicación personal.

Solución de Fabiola Czwieniczek, profesora de Matemática (jubilada). Turmero, Venezuela.

Sea MNP el triángulo isósceles dado, con $MP = MN$ y $m\angle MPN = m\angle MNP = \alpha$. Debemos hallar el coseno de α .

Establezcamos un sistema de coordenadas cartesianas (cuyo origen es O) de tal manera que los puntos N y P estén en el eje x y el punto M esté en el eje y . Sean $(0, m)$, $(n, 0)$ y $(-n, 0)$ las coordenadas de los puntos M , N y P , respectivamente, con $m \neq 0$ y $n \neq 0$. Denotemos por B baricentro del triángulo MNP . Denotemos por C al centro de la circunferencia inscrita al triángulo MNP . Esto es, C es el incentro del triángulo MNP . Nótese que:

- 1) $\overline{MO}$ es la mediana del triángulo MNP correspondiente al vértice M (figura 1). Como por hipótesis, el baricentro B está en la circunferencia inscrita, se tiene que B está en el interior del segmento $\overline{MO}$.
- 2) $\overline{MO}$ está contenido en la bisectriz del ángulo PMN (figura 2). Luego, el incentro C está en el interior del segmento $\overline{MO}$.
- 3) la circunferencia inscrita en un triángulo isósceles es tangente a la base en su punto medio. En este caso, el punto O es el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con el segmento $\overline{PN}$

En consecuencia, tenemos que los puntos B , C y O están alineados. Además, B y O pertenecen a la circunferencia inscrita cuyo centro es C . Se deduce que B y O son extremos de un diámetro y que $CB = CO = \frac{BO}{2}$. En la figura 3 se ilustra la situación.

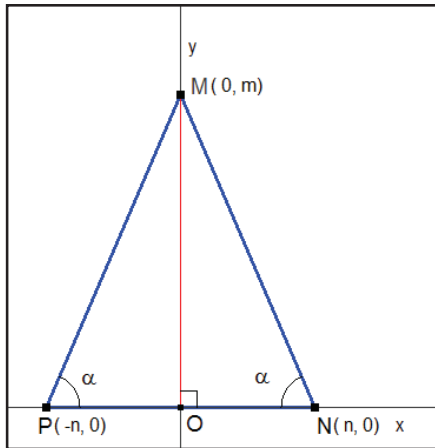


Figura 1

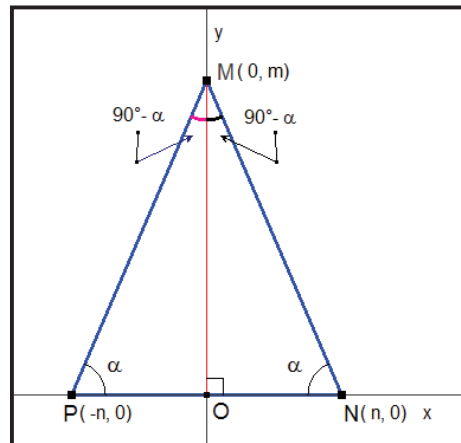


Figura 2

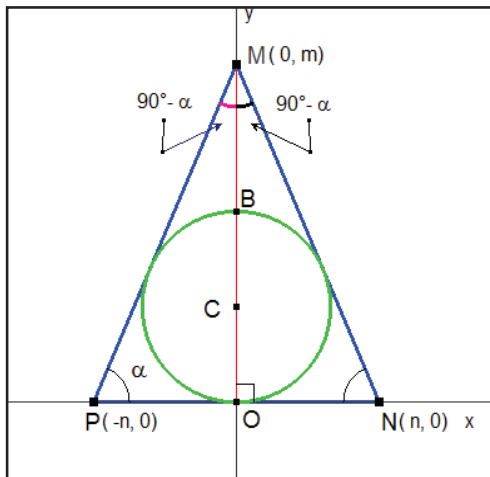


Figura 3

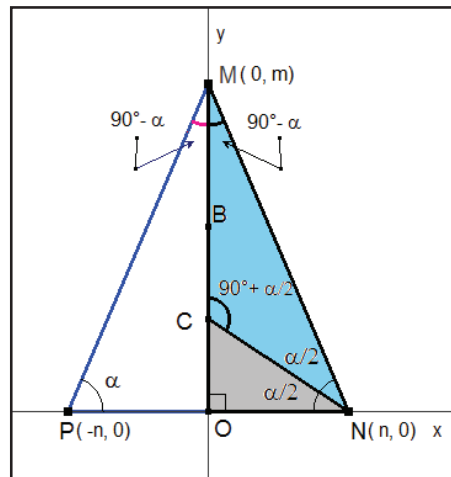


Figura 4

En referencia a la figura 4, tenemos que:

$$\cos \alpha = \frac{PO}{PM} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + m^2}} \quad (1)$$

A continuación, encontraremos la relación que existe entre m y n , la cual nos permitirá expresar una de estas variables en función de la otra. Para ello, consideremos los triángulos OCN y NCM.

Del triángulo rectángulo OCN, tenemos que

$$\tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{CO}{ON} \quad (2)$$

Recordemos que $CO = \frac{BO}{2}$. Nótese que B es el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones son $y = \frac{m}{3n}(x + n)$ y $x = 0$. Así, las coordenadas de B son $(0, \frac{m}{3})$. Luego, $BO = \frac{m}{3}$ y $CO = \frac{m}{6}$. Por otra parte, $ON = n$. Sustituyendo en (2), obtenemos

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{m}{6n} \quad (3)$$

Por otra parte, aplicando ley de los senos en el triángulo NCM,

$$\frac{MN}{\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{MC}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (4)$$

Nótese que:

$$MN = \sqrt{n^2 + m^2}; \quad \sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right); \quad MC = MO - CO = m - \frac{m}{6} = \frac{5m}{6}.$$

Sustituyendo en (4):

$$\frac{\sqrt{n^2 + m^2}}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\frac{5m}{6}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

De donde:

$$\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{5m}{6\sqrt{n^2 + m^2}} \Rightarrow \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{5m}{6\sqrt{n^2 + m^2}} \quad (5)$$

De (3) y (5):

$$\begin{aligned} \frac{m}{6n} &= \frac{5m}{6\sqrt{n^2 + m^2}} \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{5}{\sqrt{n^2 + m^2}} \\ \Rightarrow n^2 + m^2 &= 25n^2 \\ \Rightarrow m^2 &= 24n^2 \quad (6) \end{aligned}$$

Sustituyendo (6) en (1):

$$\cos \alpha = \frac{n}{\sqrt{n^2 + m^2}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 24n^2}} = \frac{n}{\sqrt{25n^2}} = \frac{n}{5n} = \frac{1}{5}$$

Así, el coseno de α es $\frac{1}{5}$.

Nota: α es aproximadamente $78,4^\circ$.