

Problema 679

Determinar el coseno del ángulo α de la base de un triángulo isósceles si se sabe que el baricentro se encuentra en la circunferencia inscrita al triángulo.

Solución de Ricard Peiró:

Sea el triángulo isósceles $\triangle ABC$ $\overline{AC} = \overline{CB} = a$, $AB = c$.

Sea $\alpha = A = B$.

Sea I el incentro. Sea r el radio de la circunferencia inscrita.

Sea M el punto medio del lado $\overline{AB}$.

Sea N el punto medio del lado $\overline{BC}$.

Sea G el baricentro que pertenece a la circunferencia inscrita.

$\overline{GM} = 2r$.

Por la propiedad del baricentro:

$\overline{CG} = 2\overline{GM} = 4r$.

Calculemos el área del triángulo:

$$S_{ABC} = \frac{c \cdot 6r}{2} = \frac{a + a + c}{2} r. \text{ Simplificando:}$$

$$5c = 2a.$$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\triangle AMC$:

$$\cos \alpha = \frac{c}{2a} = \frac{\frac{2}{5}a}{2a} = \frac{1}{5}.$$

