

Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat, de Perú

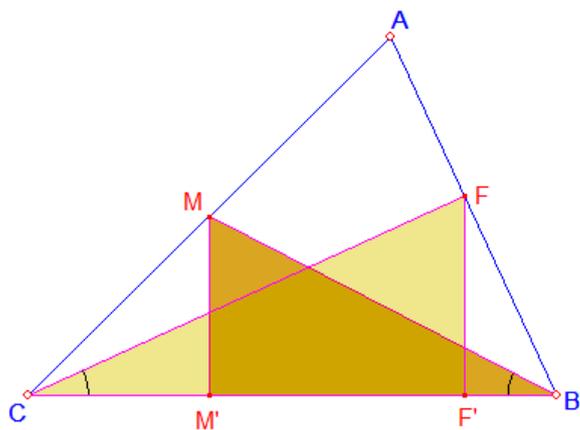
Problema 680

En un triángulo acutángulo ABC, CF es una altura, con F en AB y BM es una mediana, con M en CA. Dado que: $BM = CF$ y $m\angle MBC = m\angle FCA$, probar que el ΔABC es equilátero.

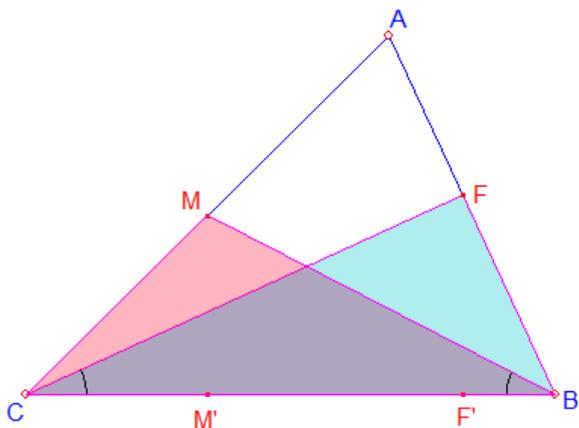
OLIMPIADA MATEMATICA BRITANICA Segundo Fase: Martes, 27 de Febrero de 1997.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Sea dado el triángulo ABC. Marcamos los puntos M y F que nos señalan en el enunciado.



Proyectamos ortogonalmente dichos puntos sobre el lado BC, obteniendo los puntos M' y F' , respectivamente. De este modo los triángulos rectángulos $MM'B$ y $FF'C$ son congruentes. Así el segmento MF es la paralela media del triángulo ABC, trazada por los puntos medios M y F de los lados AC y AB, respectivamente.



Consideramos ahora los triángulos BMC y CFB. Ambos son también congruentes ya que tienen dos lados iguales así como el ángulo que forman dichos pares de lados. En definitiva, como CF era una altura, lo será también BM y así ambas alturas se cortan en los puntos medios de los lados opuestos, respectivamente.

Por tanto, el triángulo ABC es equilátero.