

Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat, de Perú

Problema 680

En un triángulo acutángulo ABC, CF es una altura, con F en AB y BM es una mediana, con M en CA. Dado que: $BM = CF$ y $m\angle MBC = m\angle FCA$, probar que el $\triangle ABC$ es equilátero.

OLIMPIADA MATEMATICA BRITANICA Segundo Fase : Martes , 27 de Febrero de 1997

Solución del director.

Tracemos la circunferencia Ω circunscrita a ABC. Sea $U = CF \cap BM$

Sea $\angle BAC = \alpha$. Es $\angle MBC = \angle FCA = 90 - \alpha$

Sea T el punto de corte de la recta BM con Ω . Estudiemos el triángulo BTC.

$\angle BTC = \angle BAC = \alpha$ por arco capaz, $\angle TBC = \angle MBC = \angle ACF = 90 - \alpha$ por datos del problema, luego $\angle BCT = \angle CFA = 90$.

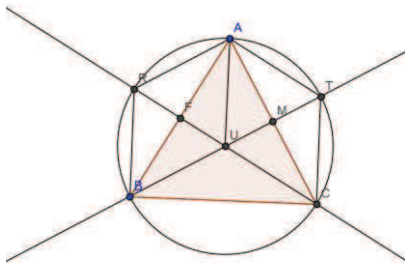
Así BT es un diámetro de Ω .

$\angle MAT = \angle CAT = \angle CBT = \angle UCA = \angle FCA = \alpha$.

Así los triángulos MAT y MCU son semejantes y al ser $MA = MC$, son además congruentes.

ATCU es rombo, por lo que AC es perpendicular a BT. Además $\angle TBA = \angle TCA$.

Así BM además de ser mediana es altura, bisectriz y mediatriz de BAC.



U es pues el ortocentro de ABC.

Sea por otra parte, $R = CF \cap \Omega$. Es $\angle RBF = \angle FBU = 90 - \alpha$.

Consideremos ahora que $\angle RBF = \angle UBF = 90 - \alpha$.

Así al ser BT diámetro debe ser $\angle BCT = 90$, o sea, $\angle BCT = \angle BCR + \angle UCA + \angle TCA = 90$, o bien:

$90 - \alpha + 90 - \alpha + 90 - \alpha = 90$; $270 - 3\alpha = 90$; $3\alpha = 180$, por lo que $\alpha = 90$, cqd.