

Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat, de Perú

Problema 680

En un triángulo acutángulo ABC, CF es una altura, con F en AB y BM es una mediana, con M en CA. Dado que: $BM = CF$ y $m\angle MBC = m\angle FCA$, probar que el ΔABC es equilátero.

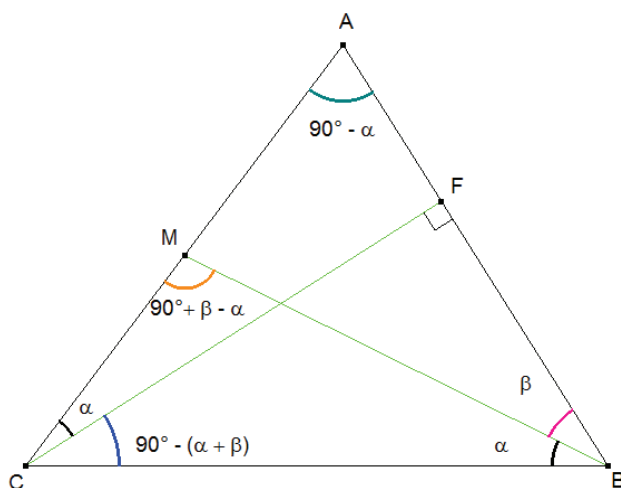
OLIMPIADA MATEMATICA BRITANICA Segundo Fase : Martes , 27 de Febrero de 1997

Solución de Fabiola Czwienckez, profesora de Matemática (jubilada). Turmero, Venezuela.

Tenemos el triángulo acutángulo ABC. $\overline{CF}$ es una altura, con F en $\overline{AB}$. Luego, $m\angle CFB = m\angle CFA = 90^\circ$. $\overline{BM}$ es una mediana, con M en $\overline{CA}$. Además, sabemos que $BM = CF$ y que $m\angle MBC = m\angle FCA$. Debemos demostrar que el ΔABC es equilátero.

Sean $m\angle MBC = \alpha$ y $m\angle MBA = \beta$, como se muestra en la figura. En consecuencia:

$$m\angle CAF = 90^\circ - \alpha ; \quad m\angle FCB = 90^\circ - (\alpha + \beta) ; \quad m\angle CMB = 90^\circ + \beta - \alpha$$



Del triángulo rectángulo CFB, tenemos que: $\text{sen } (\alpha + \beta) = \frac{CF}{CB}$ (1)

Aplicando ley de los senos en el triángulo BCM:

$$\frac{CM}{\text{sen } \alpha} = \frac{BM}{\text{sen } (90^\circ - \beta)} = \frac{CB}{\text{sen } (90^\circ + \beta - \alpha)} \quad (2)$$

De (2) obtenemos que

$$CB = \frac{BM}{\operatorname{sen}(90^\circ - \beta)} \operatorname{sen}(90^\circ + \beta - \alpha) \quad (3)$$

Nótese que:

$$\operatorname{sen}(90^\circ - \beta) = \cos \beta$$

$$\operatorname{sen}(90^\circ + \beta - \alpha) = \cos(\beta - \alpha)$$

$$BM = CF \quad (\text{por hipótesis})$$

$$\text{Sustituyendo estas igualdades en (3), nos queda: } CB = \frac{CF}{\cos \beta} \cos(\beta - \alpha) \quad (4)$$

$$\text{Sustituyendo (4) en (1): } \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{CF}{\frac{CF}{\cos \beta} \cos(\beta - \alpha)}$$

Simplificando esta última igualdad, obtenemos:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \quad (5)$$

Transformando en sumas el producto del miembro izquierdo de (5), resulta:

$$\frac{1}{2} (\operatorname{sen} 2\beta + \operatorname{sen} 2\alpha) = \cos \beta \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 2\beta + \operatorname{sen} 2\alpha = 2\cos \beta \quad (6)$$

Ahora, apliquemos ley de los senos en el triángulo BMA:

$$\frac{BM}{\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)} = \frac{AM}{\operatorname{sen} \beta} \quad (7)$$

$$\text{De (7): } BM = \frac{AM}{\operatorname{sen} \beta} \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) \Rightarrow BM = \frac{AM \cos \alpha}{\operatorname{sen} \beta} \quad (8)$$

$$\text{Por (2), sabemos que: } BM = \frac{CM}{\operatorname{sen} \alpha} \operatorname{sen}(90^\circ - \beta). \text{ Esto es: } BM = \frac{CM \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha}. \quad (9)$$

Igualando (8) y (9) y teniendo en cuenta que $AM = CM$ ya que $\overline{BM}$ es una mediana, con M en $\overline{CA}$, tenemos:

$$\frac{AM \cos \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{CM \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \sin \beta \cos \beta$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \sin 2\beta \quad (10)$$

Sustituyendo (10) en (6) obtenemos:

$$\sin 2\beta + \sin 2\beta = 2 \cos \beta$$

$$\Rightarrow 2 \sin 2\beta = 2 \cos \beta$$

$$\Rightarrow 4 \sin \beta \cos \beta = 2 \cos \beta$$

$$\Rightarrow 2 \sin \beta = 1 \quad (\text{nótese que podemos cancelar } \cos \beta, \text{ ya que } \cos \beta \neq 0, \text{ por ser ABC acutángulo})$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \beta = 30^\circ \quad \vee \quad \beta = 150^\circ$$

Como el triángulo ABC es acutángulo, se descarta la solución $\beta = 150^\circ$. En consecuencia, $\beta = 30^\circ$. Por tanto, de (10) se deduce que $\alpha = 30^\circ$. Así, las medidas de los ángulos internos del triángulo ABC son:

$$m\angle CAB = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$m\angle ABC = \alpha + \beta = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$$

$$m\angle ACB = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

Hemos demostrado que el triángulo ABC es equiángulo. Por tanto, el triángulo ABC es equilátero. QED.