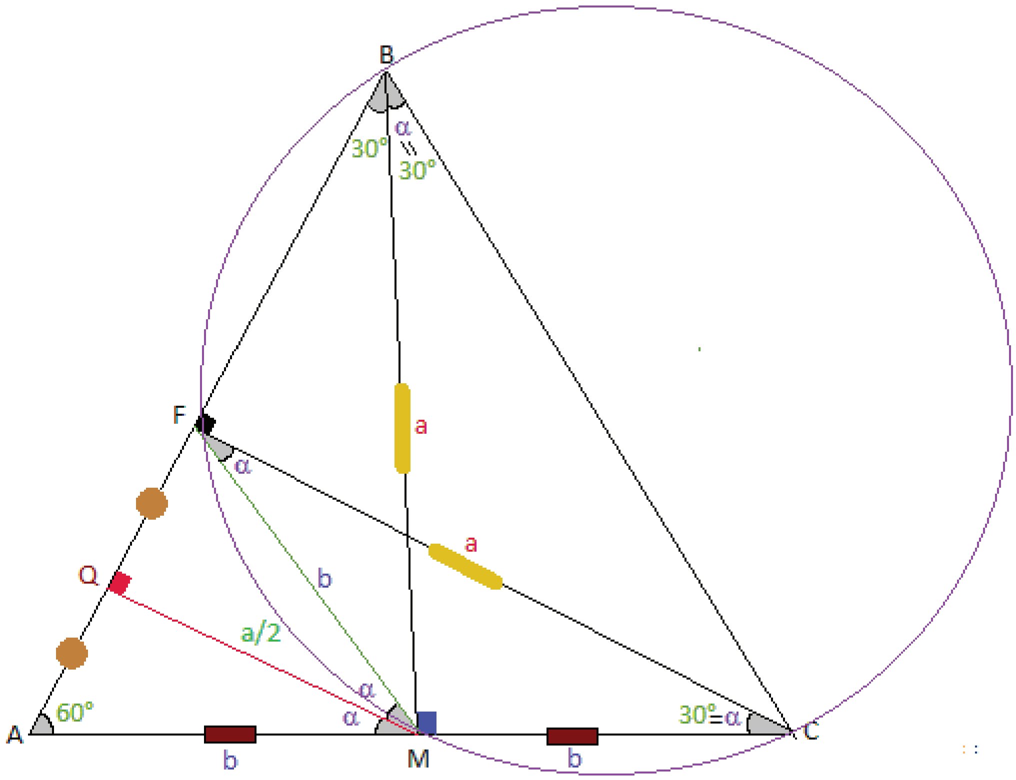
Problema 680

En un triángulo acutángulo ABC, CF es una altura ,con F en AB y BM es una mediana , con M en CA. Dado que: BM = CF y m<MBC = m<FCA, probar que el ΔABC es equilátero.

OLIMPIADA MATEMATICA BRITANICA Segundo Fase : Martes , 27 de Febrero de 1997

Solución de Julio A. Miranda Ubaldo, profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat, de Perú::



En el ΔAFC: unamos F y M , por el teorema de la mediana relativa a la hipotenusa : AM = MC = FM = b.
El ΔMFC es isósceles , luego m<MFC = α y m <FMA = 2 α.
El ΔMFC es isósceles luego m<MFC = α y m<FMA = 2α
En el ΔAMF que es isósceles tambien tracemos la altura MQ que es mediatriz, mediana y bisectriz .
En el ΔAFC : MQ es base media , luego MQ = a/2.
Observando el Δ rectangulo BQM notamos que es un triangulo rectangulo notable (30° - 60°), entonces: m<QBM = 30°.
El cuadrilatero MFBC es inscriptible puesto que: m<MFC = m<MBC = α, luego α = 30°
Por lo tanto en el ΔABC : BM es bisectriz y mediana , entonces: BM es tambien altura y mediatriz.
De esto se deduce que m<A = 60° , m<B = 60° y m<C = 60°
Por lo tanto el **ΔABC es EQUILATERO.**