

Problema 680

En un triangle acutangle $\triangle ABC$, $\overline{CF}$ és una altura, amb F en $\overline{AB}$ i $\overline{BM}$ és una mitjana, amb M en $\overline{CA}$. Donat que $\overline{BM} = \overline{CF}$ i $\angle MBC = \angle FCA$, proveu que el triangle $\triangle ABC$ és equilàter.

Solució de Ricard Peiró:

$$\angle MBC = \angle FCA = 90^\circ - A.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle BCM$:

$$\frac{\overline{BM}}{\sin C} = \frac{b}{2 \cos A} \quad (1)$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle AFC$:

$$\overline{BM} = b \cdot \sin A \quad (2)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

$$\frac{b \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{b}{2 \cos A}.$$

$$\sin 2A = \sin C.$$

a) Suposem que $2A = C$.

$$B = 180^\circ - 3A.$$

$$\angle ABM = 90^\circ - 2A.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle BMA$:

$$\frac{b}{2 \cdot \cos 2A} = \frac{\overline{BM}}{\sin A} = b.$$

$$\cos 2A = \frac{1}{2}.$$

Aleshores, $A = 30^\circ, C = 60^\circ, B = 90^\circ$. La qual cosa contradiu la hipòtesi que $\triangle ABC$ és acutangle.

b) Suposem que $2A = 180^\circ - C$.

$$A + B + C = 180^\circ.$$

Aleshores, $A = B$

Aleshores, $\overline{CF}$ és una mitjana tal que $\overline{BM} = \overline{CF}$

Per ser isòsceles la mitjana del vèrtex A és igual a la mitjana $\overline{BM}$.

Les tres mitjanes són iguals, per tant el triangle és equilàter.

