

Problema 680

En un triángulo acutángulo $\triangle ABC$, $\overline{CF}$ es una altura, con F en $\overline{AB}$ i $\overline{BM}$ es una mediana, con M en $\overline{CA}$. Dado que $\overline{BM} = \overline{CF}$ y $\angle MBC = \angle FCA$, probar que el triángulo $\triangle ABC$ es equilátero.

Solución de Ricard Peiró:

$$\angle MBC = \angle FCA = 90^\circ - A.$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\triangle BCM$:

$$\frac{\overline{BM}}{\sin C} = \frac{b}{2 \cos A} \quad (1)$$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\triangle AFC$:

$$\overline{BM} = b \cdot \sin A \quad (2)$$

Substituyendo la 'expresión (2) en la expresión (1):

$$\frac{b \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{b}{2 \cos A}.$$

$$\sin 2A = \sin C.$$

a) Supongamos que $2A = C$.

$$B = 180^\circ - 3A.$$

$$\angle ABM = 90^\circ - 2A.$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\triangle BMA$:

$$\frac{b}{2 \cdot \cos 2A} = \frac{\overline{BM}}{\sin A} = b$$

$$\cos 2A = \frac{1}{2}.$$

Entonces, $A = 30^\circ, C = 60^\circ, B = 90^\circ$. Lo que contradice la hipótesis que $\triangle ABC$ es acutángulo.

b) Supongamos que $2A = 180^\circ - C$.

$$A + B + C = 180^\circ.$$

Entonces, $A = B$

Entonces, $\overline{CF}$ es una mediana tal que $\overline{BM} = \overline{CF}$

Por ser isósceles la mediana del vértice A es igual a la mediana $\overline{BM}$.

Las tres medianas son iguales, por tanto el triángulo es equilátero.

