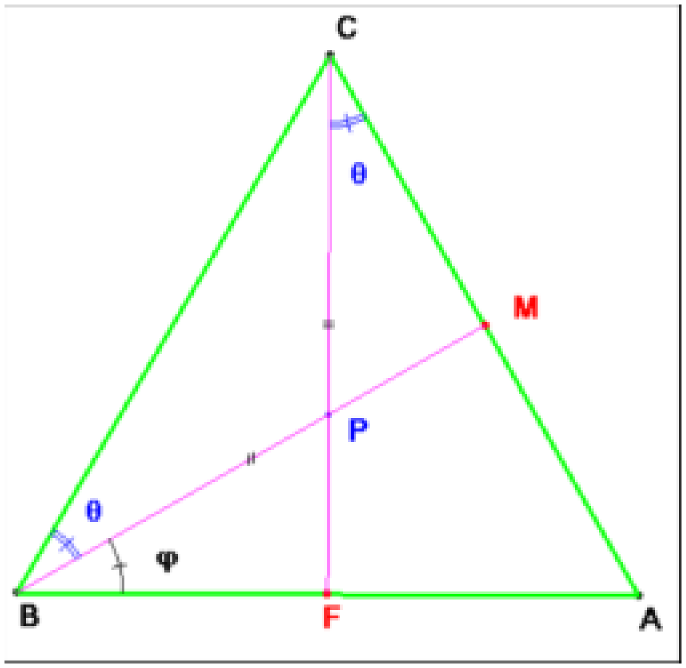
Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat, de Perú.

***Problema* 680.-** *En un triángulo acutángulo ABC, CF es una altura, con F en AB y BM es una mediana, con M en CA. Dado que $BM = CF$ y $\widehat{MBC} = \widehat{FCA}$, probar que el triángulo ABC es equilátero.*

OLIMPIADA MATEMÁTICA BRITÁNICA. Segunda fase. Martes, 27 de Febrero de 1997.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



A partir de los datos se deduce que la altura CF es

$$BM = CF = b \cdot sen\ A \qquad (1)$$

Por ser rectángulo $\triangle CFA$, se tiene

$$\theta = 90 - A \qquad (2)$$

con lo cual

$$\sphericalangle MBA = \varphi = 90 - C \qquad (3)$$

Con esto, en el triángulo BMA, de la ley de los senos se sigue

$$\frac{BM}{sen\ A} = b = \frac{b/2}{sen\ (90 - C)}$$

de donde resulta $\cos C = \frac{1}{2}$. Al tratarse de un triángulo, necesariamente,

$$C = 60º \qquad (4)$$

En el triángulo BCM de $\frac{BM}{sen\ C} = \frac{b/2}{sen\ \theta}$, usando las relaciones anteriores se tiene

$$\frac{b \cdot sen\ A}{sen\ C} = \frac{b}{2\ sen(90 - A)}$$

o bien

$$2sen\ A \cos A = sen\ 2A = sen\ C \quad (5)$$

Si $2A = C = 60$, entonces $B = 90º$ y el triángulo no es acutángulo, por tanto,

$$2A = 180 - C = 120º$$

con lo cual el triángulo es equilátero, como se quería demostrar.■