

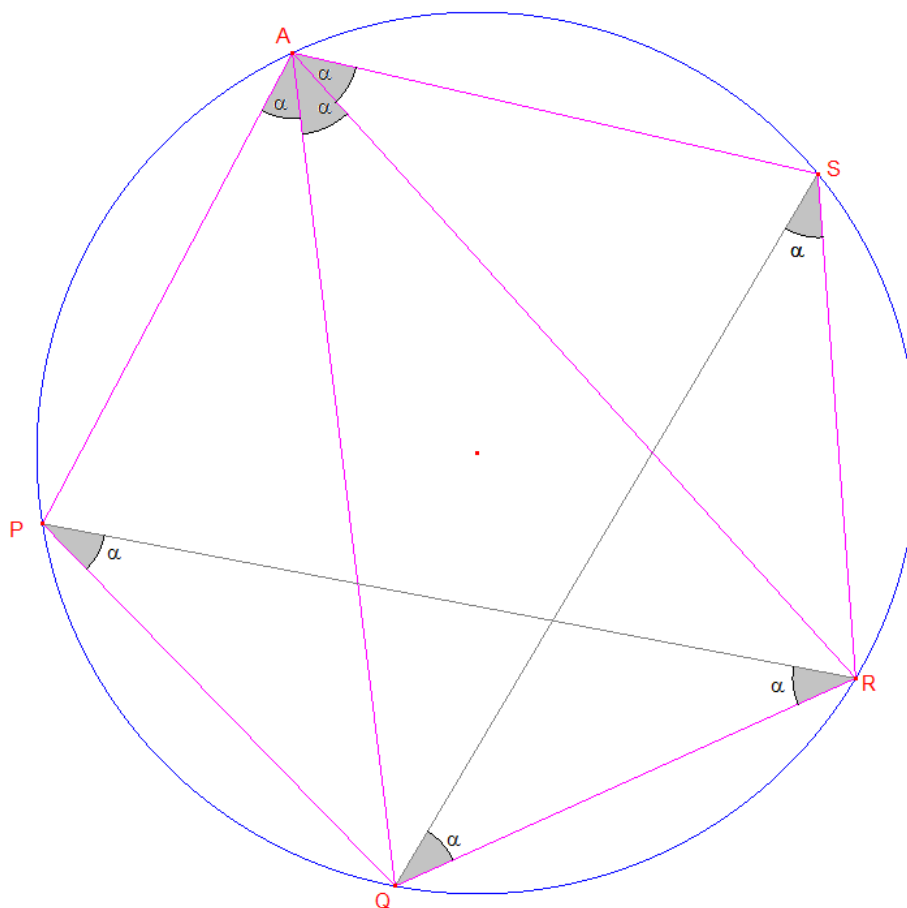
Problema 681.-

Sean APQ, AQR, ARS tres triángulos inscritos en la misma circunferencia con $\angle PAQ = \angle QAR = \angle RAS$.

Demostrar que $AR(AP+AR) = AQ(AQ+AS)$

OLIMPIADA MATEMATICA BRITANICA. Segunda Fase: Martes, 24 de Febrero de 1994.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.



A la vista de la figura, aplicamos el Teorema de Ptolomeo a los cuadriláteros inscritos APQR y AQRS. De modo que se verifican las relaciones:

$$AR.PQ + RQ.AP = AQ.PR \quad (I)$$

$$AQ.RS + AS.QR = AR.QS \quad (II)$$

Al ser iguales los ángulos $\angle PAQ = \angle QAR = \angle RAS$, estos ángulos en la misma circunferencia abarcan pues, cuerdas iguales. De esta manera, son iguales los segmentos $PQ = QR = RS = m$. Dividiendo entre sí las relaciones (I) y (II) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{AR.PQ + RQ.AP}{AQ.RS + AS.QR} &= \frac{AQ.PR}{AR.QS} \\ \frac{m.(AR + AP)}{m.(AQ + AS)} &= \frac{AQ.PR}{AR.QS} \Rightarrow \frac{(AR + AP)}{(AQ + AS)} = \frac{AQ.PR}{AR.QS} \quad (III) \end{aligned}$$

Ahora bien, las cuerdas PR y QS son iguales, porque los triángulos isósceles PQR y QRS son congruentes al tener iguales los ángulos en las bases, todos ellos iguales al ángulo $\angle PAQ = \angle QAR = \angle RAS = \alpha$.

En definitiva,

$$\frac{(AR + AP)}{(AQ + AS)} = \frac{AQ}{AR} \Rightarrow AR.(AR + AP) = AQ.(AQ + AS) \quad \text{c.q.d.}$$