Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat, de Perú

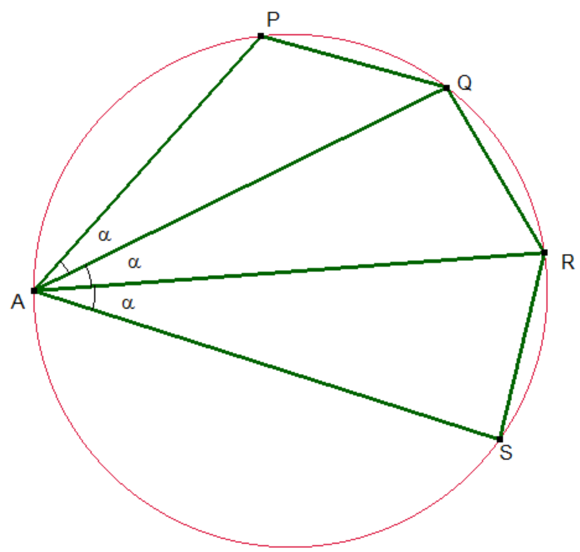
Problema 681.-

Sean APQ, AQR, ARS tres triángulos inscritos en la misma circunferencia con <PAQ=<QAR=<RAS. Demostrar que AR(AP+AR)=AQ(AQ+AS)

OLIMPIADA MATEMATICA BRITANICA. Segunda Fase : Martes , 24 de Febrero de 1994.

Solución de Fabiola Czwienczek, profesora de Matemática (jubilada). Turmero, Venezuela.

Tenemos los triángulos APQ, AQR y ARS inscritos en la misma circunferencia con m<PAQ = m<QAR = m<RAS = α, como se muestra en la figura.



Como m<PAQ = m<QAR = m<RAS, podemos asegurar que PQ = QR = RS.

Además, m<PAR = m<QAS. Por tanto, PR = QS.

Nótese que los cuadriláteros APQR y AQRS son cuadriláteros cíclicos. Aplicaremos, en cada uno de ellos, el teorema de Ptolomeo cuyo enunciado es:

En todo cuadrilátero cíclico, la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de sus diagonales.

Así, en el cuadrilátero APQR se tiene que

$$AP \cdot QR + PQ \cdot AR = PR \cdot AQ \quad (1)$$

Como QR = PQ, la igualdad (1) es equivalente a: QR (AP + AR) = PR . AQ (2)

Ahora, aplicando el teorema de Ptolomeo en el cuadrilátero AQRS:

$$AQ.\ RS + QR.\ AS = AR\ .\ QS \quad (3)$$

Teniendo en cuenta que QR = RS, la igualdad (3) es equivalente a:

$$QR\ (AQ + AS) = AR.\ QS \quad (4)$$

Dividiendo las expresiones (2) y (4), obtenemos:

$$\frac{QR\ (AP + AR)}{QR\ (AQ + AS)} = \frac{PR\ .AQ}{AR.QS} \quad (5)$$

Recordemos que PR = QS. Simplificando (5), tenemos que:

$$\frac{AP\ +\ AR}{AQ\ +\ AS} = \frac{AQ}{AR}$$

De donde, se concluye que AR (AP + AR) = AQ (AQ + AS). QED.