

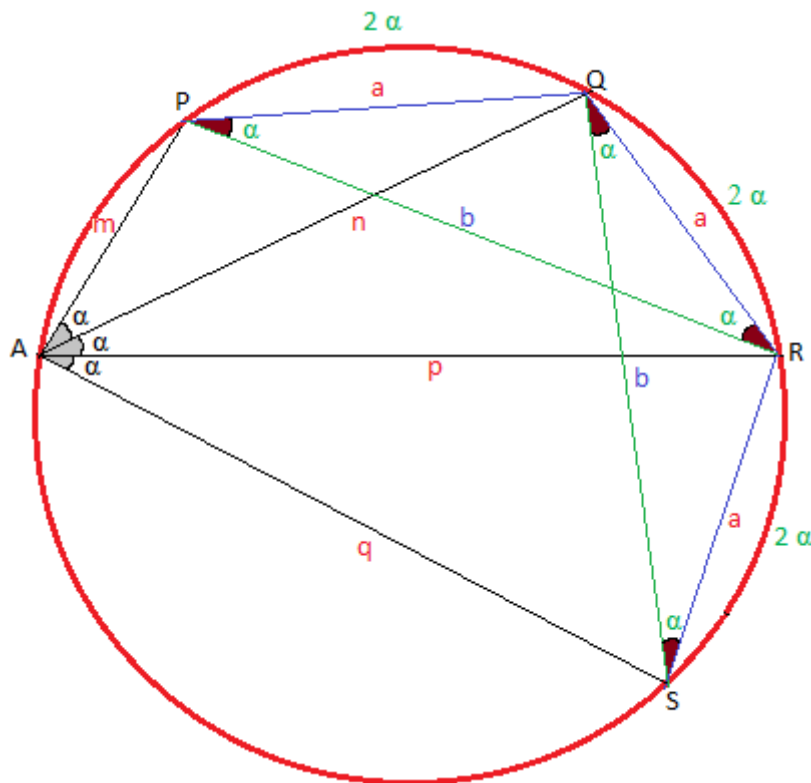
Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat, de Perú

Problema 681.-

Sean APQ, AQR, ARS tres triángulos inscritos en la misma circunferencia con $\angle PAQ = \angle QAR = \angle RAS$. Demostrar que $AR(AP+AR) = AQ(AQ+AS)$

OLIMPIADA MATEMATICA BRITANICA. Segunda Fase : Martes , 24 de Febrero de 1994.

Solución de Julio A. Miranda Ubaldo, profesor del Grupo de Asesoría Matemática Fermat, de Perú.



Sea $m\angle PAQ = m\angle QAR = m\angle RAS = \alpha$

Unamos los puntos P y Q, Q y R, R y S, Q y S, y finalmente P y R.

Ahora hagamos: $AP = m$, $AQ = n$, $AR = p$ y $AS = q$

De la figura $m\angle PAQ = m\angle PRQ = \alpha$, análogamente:

$m\angle QAR = m\angle QSR = \alpha$ y $m\angle RAS = m\angle SQR = \alpha$

Se observa que los triángulos PQR ($PQ = QR = a$) y QRS ($QR = SR = a$) son isosceles y congruentes a la vez

Por lo tanto $PR = QS = b$.

En el cuadrilátero inscrito APQR aplicando el teorema de Ptolomeo tendremos:

$$ma + ap = nb \quad \text{luego : } a(m + p) = nb \quad \dots(1)$$

En el cuadrilátero inscrito AQRS aplicando nuevamente el teorema de Ptolomeo tendremos:

$$na + aq = pb \quad \text{luego : } pb = a(n + q) \quad \dots(2)$$

multiplicando miembro a miembro las ecuaciones (1) y (2) obtendremos:

$$apb(m + b) = nba(n + q)$$

$$\text{finalmente } p(m + p) = n(n + q)$$

Por lo tanto volviendo a los terminos originales:

$$\mathbf{AR(AP + AR) = AQ(AQ + AS)} \quad \text{l.q.q.d}$$