

Problema 681

Sean $\triangle APQ$, $\triangle AQR$, $\triangle ARS$ tres triángulos inscritos en la misma circunferencia con $\angle PAQ = \angle QAR = \angle RAS$.

Demostrar que $\overline{AR}(\overline{AP} + \overline{AR}) = \overline{AQ}(\overline{AQ} + \overline{AS})$.

Solución Ricard Peiró:

Si $\angle PAQ = \angle QAR = \angle RAS$, entonces:

$$\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS} = a, \quad \overline{PR} = \overline{QS}.$$

Aplicando el teorema de Tolomeu al cuadrilátero inscrito APQR:

$$\overline{AP} \cdot a + \overline{AR} \cdot a = \overline{PR} \cdot \overline{AQ} \quad (1)$$

Aplicando el teorema de Tolomeu al cuadrilátero inscrito AQRS:

$$\overline{AQ} \cdot a + \overline{AS} \cdot a = \overline{QS} \cdot \overline{AR} = \overline{PR} \cdot \overline{AR} \quad (2)$$

De la expresión (1):

$$\frac{1}{a} \overline{PR} = \frac{\overline{AP} + \overline{AR}}{\overline{AQ}} \quad (3)$$

De la expresión (2):

$$\frac{1}{a} \overline{PR} = \frac{\overline{AQ} + \overline{AS}}{\overline{AR}} \quad (4)$$

Igualando las expresiones (3) (4):

$$\frac{\overline{AP} + \overline{AR}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{AQ} + \overline{AS}}{\overline{AR}} \quad (5)$$

Entonces, $\overline{AR}(\overline{AP} + \overline{AR}) = \overline{AQ}(\overline{AQ} + \overline{AS})$.

