

Problema 681.- Sean APQ, AQR, ARS tres triángulos inscritos en la misma circunferencia con $\angle PAQ = \angle QAR = \angle RAS$.

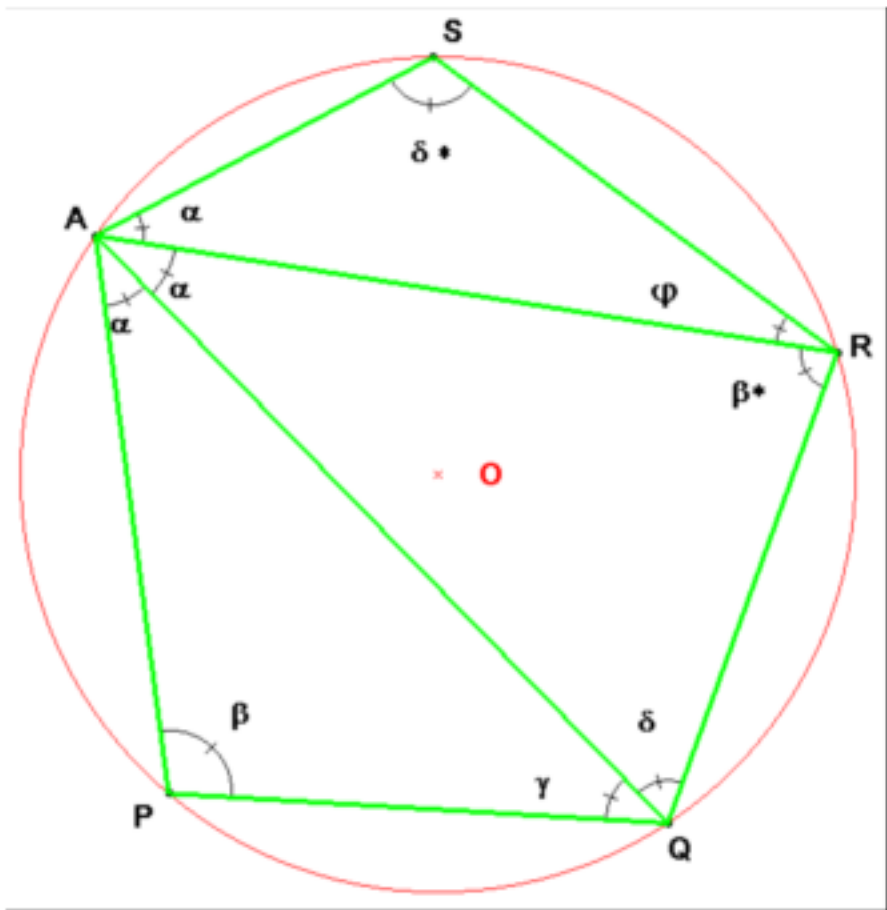
Demostrar que $AR(AP + AR) = AQ(AQ + AS)$.

OLIMPIADA MATEMÁTICA BRITÁNICA. Segunda Fase: Martes, 24 de Febrero de 1994.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

La relación $AR(AP + AR) = AQ(AQ + AS)$, puede ponerse como

$$\frac{AR}{AQ} = \frac{AQ + AS}{AR + AP} \quad (1)$$



La demostración de esta igualdad se basa en que la razón de un lado de un triángulo con el seno del ángulo opuesto es una constante igual al diámetro de la circunferencia circunscrita. Por eso, para los lados con origen en A , se puede poner la siguiente cadena de igualdades:

$$\frac{AP}{\text{sen } \gamma} = \frac{AQ}{\text{sen } \beta} = \frac{AR}{\text{sen } \delta} = \frac{AS}{\text{sen } \varphi} = \frac{AP + AR}{\text{sen } \gamma + \text{sen } \delta} = \frac{AQ + AS}{\text{sen } \beta + \text{sen } \varphi} \quad (2)$$

La relación (1) es, por tanto, equivalente a

$$\frac{\text{sen } \beta + \text{sen } \varphi}{\text{sen } \gamma + \text{sen } \delta} = \frac{\text{sen } \delta}{\text{sen } \beta} \quad (3)$$

En la figura tenemos dos cuadriláteros inscritos que nos interesan especialmente: son $APQR$ y $AQRS$. Un ángulo y su suplementario se distinguen por un asterisco en uno de ellos.

En $APQR$ γ y δ , junto con 2α suman dos rectos, esto es, $\delta = 180 - 2\alpha - \gamma = \beta - \alpha$.

En $AQRS$ son φ y β^* los que junto con 2α suman dos rectos, por tanto, $\varphi + 180 - \beta + 2\alpha = 180$, de donde obtenemos $\varphi = \beta - 2\alpha$.

Aplicando la fórmula de suma de senos resultará ahora

- $\text{sen } \gamma + \text{sen } \delta = 2 \cdot \text{sen} \left(\frac{\gamma + \delta}{2} \right) \cos \left(\frac{\gamma - \delta}{2} \right) = 2 \cdot \text{sen}(90 - \alpha) \cdot \cos(90 - \beta) = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta$

pues $\gamma + \delta = 180 - 2\alpha$ y $\gamma - \delta = \alpha + \gamma - \beta = 180 - 2\beta$

- $\text{sen } \beta + \text{sen } \varphi = \text{sen } \beta + \text{sen}(\beta - 2\alpha) = 2 \cdot \text{sen}(\beta - \alpha) \cos \alpha = 2 \cdot \text{sen } \delta \cos \alpha =$

Llevando estos resultados a la expresión (2) tenemos

$$\frac{\text{sen } \beta + \text{sen } \varphi}{\text{sen } \gamma + \text{sen } \delta} = \frac{\text{sen } \delta}{\text{sen } \beta}$$

como queríamos probar. ■