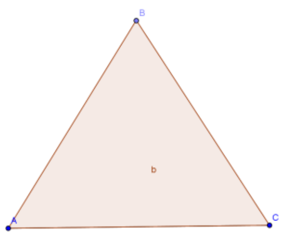
Problema 682

Hallar el coseno del ángulo α a la base de un triángulo isósceles si se sabe que el circuncentro se encuentra en la circunferencia inscrita en el triángulo.

Peiró, R. (2013): Comunicación personal.

Solución del director

Tenemos que:



En un isósceles A B C donde la base es b y los lados iguales son a , a, tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{b/2}{a} = \frac{b}{2a} \rightarrow \mathrm{b} = 2\mathrm{a}\cos\alpha$$

Por otra parte, el inradio en un triángulo isósceles es:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{a+a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+a+b}{2}-b\right)}{\frac{a+a+b}{2}}}$$

De donde,

$$2r = \sqrt{\frac{b^2(2a-b)}{2a+b}} = \sqrt{\frac{4a^{\,2}\,(\cos\alpha)^2\,(2a - \;2a\cos\alpha)}{2a+2a\cos\alpha}}$$

La mediana, altura y bisectriz de B es:

$$m_b = \sqrt{\frac{4a^2-b^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2-4a^{\,2}\,(\cos\alpha)^2}{4}}$$

El circunradio ha de medir en este caso:

$$R = m_b - 2r = \sqrt{\frac{4a^2-4a^{\,2}\,(\cos\alpha)^2}{4}} - \sqrt{\frac{4a^{\,2}\,(\cos\alpha)^2\,(2a - \;2a\cos\alpha)}{2a+2a\cos\alpha}}$$

Por otra parte, deberá ser

$R^2 = (2r)^2 + \;(\frac{b}{2})^2 = (\sqrt{\frac{4a^{\,2}\,(\cos\alpha)^2(2a-2a\cos\alpha)}{2a+2a\cos\alpha}})^2 + (a\cos\alpha)^2$.

Igualando, desarrollando y simplificado se tiene:

$$2\,(\cos\alpha)^2 - \;4\cos\alpha + 1 = 0$$

Así $\cos\alpha = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$, es decir.

cos α=1,71, lo que anula este valor,

cos α= 0,29, lo que da lugar al valor aproximado de α=72,97º

Ricardo Barroso Campos

Profesor jubilado.

Universidad de Sevilla.