Propuesto por Ricard Peiró i Estruch. Profesor de Matemáticas del IES "Abastos" (València)

Problema 682

Hallar el coseno del ángulo α de la base de un triángulo isósceles si se sabe que el circuncentro se encuentra en la circunferencia inscrita en el triángulo.

Peiró, R. (2013): Comunicación personal.

Solución de Fabiola Czwienczek, profesora de Matemática (jubilada). Turmero, Venezuela.

Sea MNP el triángulo isósceles dado, con MP = MN y m<MPN = m<MNP = α. Se sabe que el circuncentro del triángulo MNP se encuentra en la circunferencia inscrita. Debemos hallar el coseno de α.

Nótese que el triángulo MNP no puede ser obtusángulo. En efecto, de serlo, su circuncentro se ubica en el exterior del triángulo MNP y no podría pertenecer a la circunferencia inscrita. Consideremos los siguientes casos.

<u>Caso 1:</u> Supongamos que el triángulo MNP es isorrectángulo. Entonces, m<MNP = m<MPN = 45° y m<PMN = 90°. En estas condiciones, el circuncentro coincide con el punto medio de la hipotenusa $\overline{PN}$ y es el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con dicho lado (figura 1). Por tanto, el circuncentro se encuentra en la circunferecia inscrita.

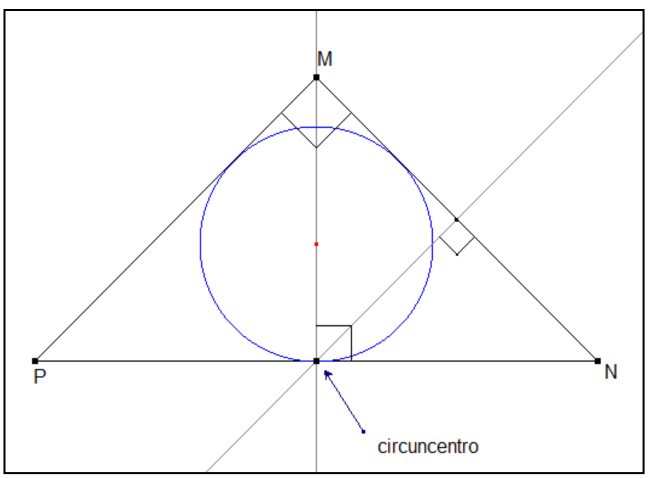

Figura 1

En este caso, la respuesta es cos 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Caso 2: supongamos que el triángulo MNP es acutángulo. Así, el circuncentro se encuentra en el interior de MNP.

Establezcamos un sistema de coordenadas cartesianas (cuyo origen es O) de tal manera que los puntos N y P estén en el eje x y el punto M esté en el eje y. Sean (0, m), (1, 0) y (– 1, 0) las coordenadas de los puntos M, N y P, respectivamente, con m ≠ 0. Denotemos por D al circuncentro del triángulo MNP. Denotemos por C al centro de la circunferencia inscrita al triángulo MNP. Esto es, C es el incentro del triángulo MNP. Nótese que:

1) $\overline{MO}$ es la mediatriz del triángulo MNP correspondiente al vértice M. Como por hipótesis, el circuncentro D está en la circunferencia inscrita, se tiene que D está en el interior del segmento .

2) $\overline{MO}$ está contenido en la bisectriz del ángulo PMN. Luego, el incentro C está en el interior del segmento $\overline{MO}$.

3) la circunferencia inscrita en un triángulo isósceles es tangente a la base en su punto medio. En este caso, el punto O es el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con el segmento

En consecuencia, tenemos que los puntos D, C y O están alineados. Además, D y O pertenecen a la circunferencia inscrita cuyo centro es C. Se deduce que D y O son extremos de un diámetro y que CD = CO = $\frac{DO}{2}$. En la figura 2 se ilustra la situación.

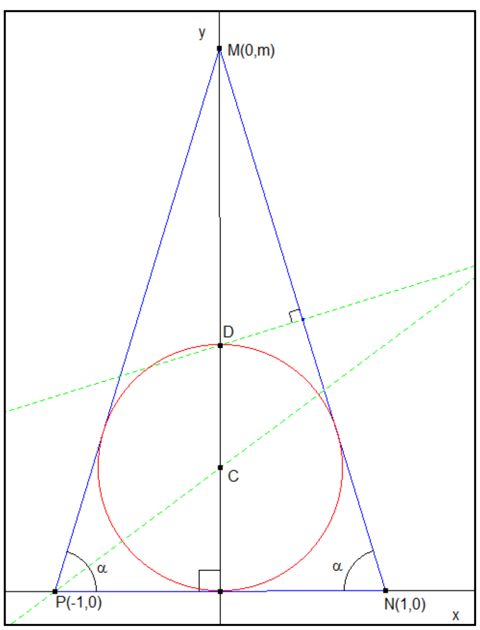

Figura 2

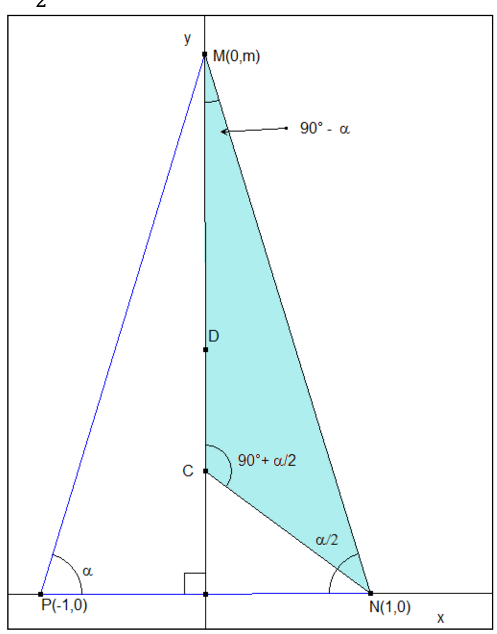

Figura 3

En referencia a la figura 3, tenemos que:

$$\cos\alpha = \frac{PO}{PM} = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \quad (1)$$

Consideremos los triángulos OCN y NCM.

Del triángulo rectángulo OCN, tenemos que

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{CO}{ON} \quad (2)$$

Recordemos que CO = $\frac{DO}{2}$. D es el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones son y = $\frac{1}{m}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{m}{2}$ y x = 0. Así, las coordenadas de D son $\left(0, \frac{m^2-1}{2m}\right)$. Luego, OD = $\frac{m^2-1}{2m}$ y CO = $\frac{m^2-1}{4m}$. Como ON = 1, entonces de (2), tenemos que :

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{m^2-1}{4m} \quad (3)$$

Por otra parte, aplicando ley de los senos en el triángulo NCM,

$$\frac{MN}{sen\left(90°+\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{MC}{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (4)$$

Nótese que:

MN = $\sqrt{m^2+1}$; MC = MO – CO = m – $\frac{m^2-1}{4m} = \frac{3m^2+1}{4m}$

Sustituyendo en (4):

$$\frac{\sqrt{m^2+1}}{cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\frac{3m^2+1}{4m}}{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

De donde:

$$\frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{3\,m^2+1}{4m\sqrt{m^2+1}} \Rightarrow \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3\,m^2+1}{4m\,\sqrt{m^2+1}} \quad (5)$$

De (3) y (5):

$$\frac{m^2-1}{4m} = \frac{3\,m^2+1}{4m\,\sqrt{m^2+1}} \Rightarrow m^2-1 = \frac{3m^2+1}{\sqrt{m^2+1}} \Rightarrow (m^2-1)\sqrt{m^2+1} = 3m^2+1$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando, obtenemos:

$$m^6 - 10m^4 - 7m^2 = 0$$

Como m es no nulo, esta ecuación se simplifica, quedando: $m^4 - 10m^2 - 7 = 0$

Así, $m^2 = \frac{10 \pm \sqrt{128}}{2} = \frac{10 \pm 8\sqrt{2}}{2} = 5 \pm 4\sqrt{2}$.

Descartamos la solución $5 - 4\sqrt{2}$ ya que es menor que cero. En consecuencia,

$$m^2 = 5 + 4\sqrt{2} \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en (1):

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5+4\sqrt{2}+1}} = \frac{1}{\sqrt{6+4\sqrt{2}}}$$

Así, el coseno de α es $\frac{1}{\sqrt{6+4\sqrt{2}}}$.

Nota: α es aproximadamente 72,96°.