

Problema 682

Determineu el cosinus de l'angle α de la base d'un triangle isòsceles si se sap que el circumcentre es troba en la circumferència inscrita al triangle.

Solució:

Siga el triangle isòsceles $\triangle ABC$ $\overline{AC} = \overline{CB} = a$, $AB = c$.

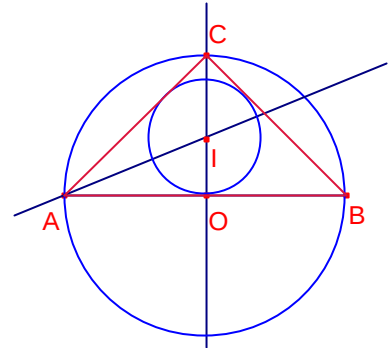
Siga $\alpha = A = B$.

Siga O el circumcentre que pertany a la circumferència inscrita.

Suposem que el circumcentre és el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Aleshores $C = 90^\circ$ el triangle $\triangle ABC$ és rectangle i isòsceles.

$$\alpha = 45^\circ. \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Si O no pertany al costat $\overline{AB}$.

Siga $R = \overline{OC}$ el radi de la circumferència circumscrita.

$\overline{OI} = r$.

Pel teorema d'Euler de la distància entre l' incentre i el circumcentre:

$$\overline{OI} = \sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

Aleshores, $r = \sqrt{R^2 - 2Rr}$. Elevant al quadrat:

$$R^2 - 2rR - r^2 = 0. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$R = (1 + \sqrt{2})r.$$

Siga T el punt de tangència de la circumferència inscrita i el costat $\overline{BC}$.

$\angle CIT = \alpha$. Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle ITC$:

$$\cos \alpha = \frac{r}{r + R}. \quad \cos \alpha = \frac{r}{r + (1 + \sqrt{2})r} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}.$$

