

Problema 682

Determinar el coseno del ángulo α de la base de un triángulo isósceles si se sabe que el circuncentro se encuentra en la circunferencia inscrita al triángulo.

Solución:

Sea el triángulo isósceles $\triangle ABC$ $\overline{AC} = \overline{CB} = a$, $AB = c$.

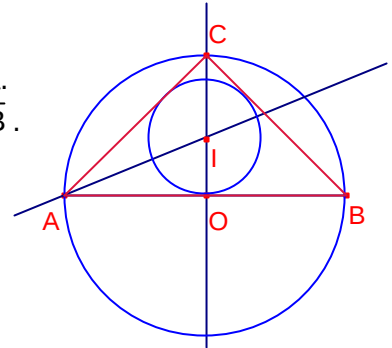
Sea $\alpha = A = B$.

Sea O el circuncentro que pertenece a la circunferencia inscrita.

Supongamos que el circuncentro es el punto medio del lado $\overline{AB}$.

Entonces $C = 90^\circ$ el triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo y isósceles.

$$\alpha = 45^\circ. \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Si O no pertenece al lado $\overline{AB}$.

Sea $R = \overline{OC}$ el radio de la circunferencia circunscrita.

$\overline{OI} = r$.

Por el teorema de Euler de la distancia entre el incentro y el circuncentro:

$$\overline{OI} = \sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

Entonces, $r = \sqrt{R^2 - 2Rr}$. Elevando al cuadrado:

$$R^2 - 2rR - r^2 = 0. \text{ Resolviendo la ecuación:}$$

$$R = (1 + \sqrt{2})r.$$

Sea T el punto de tangencia de la circunferencia inscrita y el lado $\overline{BC}$.

$\angle CIT = \alpha$. Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo

$\triangle ITC$:

$$\cos \alpha = \frac{r}{r + R}. \quad \cos \alpha = \frac{r}{r + (1 + \sqrt{2})r} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}.$$

