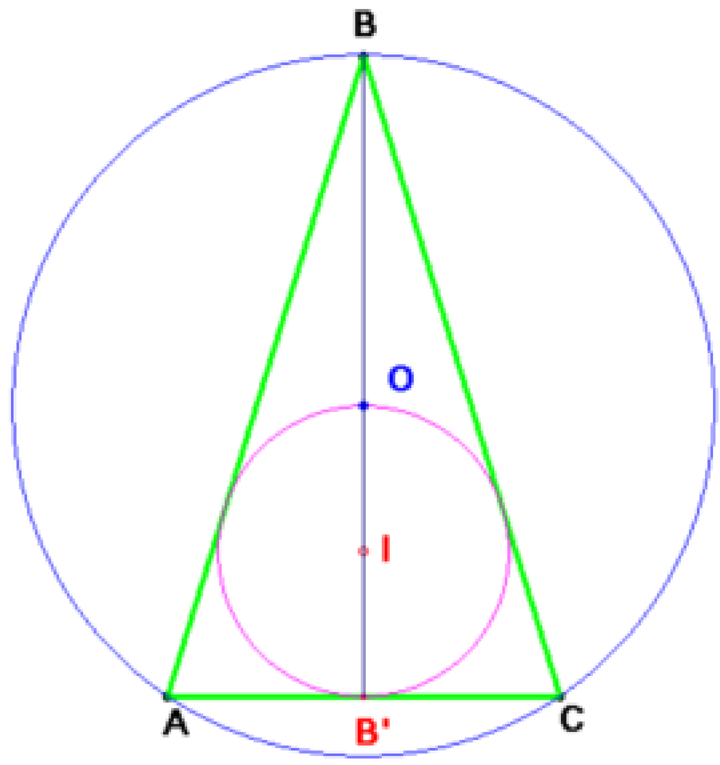
Propuesto por Ricard Peiró i Estruch. Profesor de Matemáticas del IES "Abastos" (Valencia).

***Problema** 682.- Hallar el coseno del ángulo α de la base de un triángulo isósceles si se sabe que el circuncentro se encuentra en la circunferencia inscrita en el triángulo.*

Peiró, R. (2013): Comunicación personal

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Con las notaciones habituales de R y r para los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita respectivamente, resulta que el circuncentro O, (como el baricentro en el problema 679) ha de ser diametralmente opuesto al punto medio B' de la base AC. Por tanto está a distancia r del incentro I. La altura h, soporte de estos dos puntos, mide $R+2r$.

Por el teorema de Euler, $OI^2 = R(2R-r)$, o lo que es igual: $r^2 = R^2 - 2rR$, de donde se obtiene $\boldsymbol{R = (\sqrt{2}+1)r}$

Aplicando para el área del triángulo las expresiones referidas a una base y su altura y al semiperímetro y el radio de la circunferencia inscrita podemos escribir:

$$\boldsymbol{b \cdot h = 2s \cdot r,}$$

o bien

$$\boldsymbol{b \cdot (R+2r) = (2a+b) \cdot r.}$$

Poniendo R en función de r y eliminando el radio r se obtiene la expresión

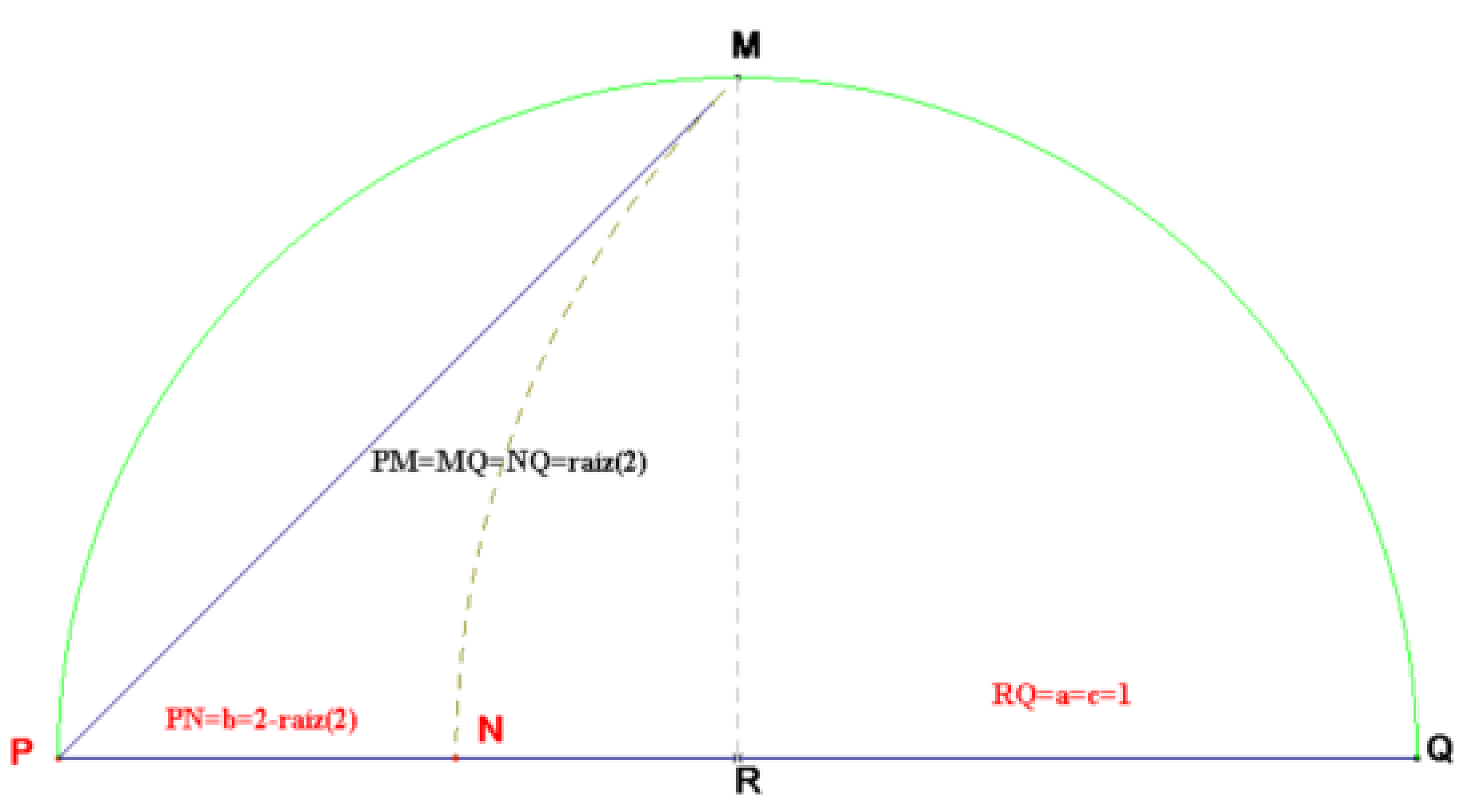
$$\boldsymbol{b(\sqrt{2}+3) = 2a+b,}$$

De esta última igualdad podemos despejar b, resultando:

$\boldsymbol{b = (2-\sqrt{2})a}$

El triángulo buscado tiene lados $\boldsymbol{a = c = 1}$, $\boldsymbol{b = (2-\sqrt{2})a.}$

De todo esto resulta $cosA = \frac{b}{2a} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$.



La segunda figura muestra la construcción del segmento b, a partir de a que se toma como unidad.

∎